解答例

STEP II 2023、第 5 問

純粋数学 • 漸化式と収束

> **STEP II 2023、問 5**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は、OCR が配布している 2023 年の STEP 過去問一式（zip ファイル）のうち、STEP II の問題用紙にある：
>
> www.ocr.org.uk/Images/707102-2023-past-papers.zip

この問題は、*Beyond STEP* の第 2.7 節「*6* 桁か、*600* 桁か」で詳しく解説されている：
https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/ch02/newton-speed.html

鍵となる考え方

どちらの漸化式（recurrence）も $\sqrt{2}$ を近似するための装置であり、この問題の主題は誤差（error）がどれほど速く小さくなるかである。各小問の要点は、誤差を正しい方法で測ることにある。(i) では $x_n^2 - 2$ に注目する。これは各段階で大きさが高々 $\frac{1}{4}$ の因子を掛けられる（そして符号が変わる）。(ii) では $y_n - \sqrt{2}$ に注目する。これは各段階で（おおよそ）2 乗される。定数を掛けるのでは着実に進むだけだが、2 乗すると正しい桁数が毎回 2 倍になる。だからこそ小問 (ii) は同じ 10 段階で 10^{-600} に到達するのである。

解答

小問 (i)

(a) 漸化式は次のように書き直せる。

$$x_{n+1} = \frac{(x_n + 1) + 1}{x_n + 1} = 1 + \frac{1}{x_n + 1}.$$

$x_0 = 1 \geq 1$ である。$x_n \geq 1$ ならば $x_n + 1 > 0$ であるから $\frac{1}{x_n+1} > 0$ となり、$x_{n+1} > 1$ である。数学的帰納法（induction）により、すべての n について $x_n \geq 1$ である。

(b) 全体を通分する。

$$\begin{aligned} x_{n+1}^2 - 2 &= \frac{(x_n+2)^2 - 2(x_n+1)^2}{(x_n+1)^2} \\ &= \frac{x_n^2 + 4x_n + 4 - 2x_n^2 - 4x_n - 2}{(x_n+1)^2} \\ &= \frac{-(x_n^2-2)}{(x_n+1)^2}. \end{aligned}$$

分母は正であるから、$x_{n+1}^2 - 2$ と $x_n^2 - 2$ は異符号である。（どちらも決してゼロにはならない。帰納法によりすべての x_n は有理数（rational）であり、$\sqrt{2}$ は無理数（irrational）だからである。）

絶対値（modulus）をとり、(a) より $x_n + 1 \geq 2$、したがって $(x_n+1)^2 \geq 4$ であることを用いると

$$|x_{n+1}^2 - 2| = \frac{|x_n^2 - 2|}{(x_n+1)^2} \leq \tfrac{1}{4}|x_n^2 - 2|,$$

となり、求める不等式が得られる。

(c) $x_0^2 - 2 = -1$ であるから、(b) を 10 回適用すると

$$|x_{10}^2 - 2| \leq \left(\tfrac{1}{4}\right)^{10} |x_0^2 - 2| = \frac{1}{4^{10}} = \frac{1}{1\,048\,576} < 10^{-6}.$$

符号については、$x_0^2 - 2 < 0$ であり、符号は各段階で反転するので、偶数の n ではつねに $x_n^2 - 2$ は負である。特に $x_{10}^2 - 2 < 0$ であり、したがって

$$-10^{-6} < x_{10}^2 - 2 < 0, \qquad \text{すなわち、} \qquad 2 - 10^{-6} \leq x_{10}^2 \leq 2.$$

小問 (ii)

(a) まず、すべての y_n は正である。実際、$y_0 = 1 > 0$ であり、$y_n > 0$ ならば $y_{n+1} = \frac{y_n^2+2}{2y_n} > 0$ である。よって漸化式でゼロによる割り算が起こることはない。さて

$$y_{n+1} - \sqrt{2} = \frac{y_n^2 + 2 - 2\sqrt{2}\,y_n}{2y_n} = \frac{(y_n - \sqrt{2})^2}{2y_n},$$

である。$(y_n - \sqrt{2})^2 = y_n^2 - 2\sqrt{2}\,y_n + 2$ だからである。これが求める恒等式である。

ここから導かれることについて。$y_0 = 1$ である。$n \geq 1$ のとき、恒等式（$n-1$ に適用したもの）により、$y_n - \sqrt{2}$ は平方数を正の数 $2y_{n-1}$ で割ったものであるから $y_n - \sqrt{2} \geq 0$ であり、したがって $y_n \geq \sqrt{2} > 1$ である。よってすべての $n \geq 0$ について $y_n \geq 1$ である。

(b) $e_n = y_n - \sqrt{2}$、$r = \dfrac{\sqrt{2}-1}{2}$ とおく。(a) より $n \geq 1$ について $e_n \geq 0$ であり、また $y_n \geq 1$ であるから

$$e_{n+1} = \frac{e_n^2}{2y_n} \leq \frac{e_n^2}{2}.$$

$n \geq 1$ について $e_n \leq 2r^{2^n}$ であることを帰納法で証明する。

基底段階 $n = 1$。$y_1 = \frac{3}{2}$ であるから $e_1 = \frac{3}{2} - \sqrt{2}$ であり、一方

$$2r^2 = 2 \cdot \frac{(\sqrt{2}-1)^2}{4} = \frac{3-2\sqrt{2}}{2} = \tfrac{3}{2} - \sqrt{2}.$$

よって不等式は等号で成り立つ。

帰納段階。 ある $n \geq 1$ について $0 \leq e_n \leq 2r^{2^n}$ が成り立つと仮定する。

? **考えてみよう** なぜ $e_n \leq 2r^{2^n}$ の両辺を 2 乗してよいのか？

2 乗しても不等式が保たれるのは**非負**の数どうしの場合であり、$e_n \geq 0$ はまさに小問 (a) で得られたことである。（評価が $n = 0$ ではなく $n = 1$ から始まるのはこのためである。$e_0 = 1 - \sqrt{2}$ は負である。）よって

$$e_{n+1} \leq \frac{e_n^2}{2} \leq \frac{\left(2r^{2^n}\right)^2}{2} = \frac{4r^{2^{n+1}}}{2} = 2r^{2^{n+1}},$$

となり、帰納法が完結する。

(c) 下界 $y_{10} \geq \sqrt{2}$ は (a) で示した。上界については、$\sqrt{2} - 1 < \frac{1}{2}$ より $0 < r < \frac{1}{4}$ であるから、(b) より

$$y_{10} - \sqrt{2} \leq 2r^{2^{10}} = 2r^{1024} < 2\left(\tfrac{1}{4}\right)^{1024} = 2 \cdot 2^{-2048} = 2^{-2047}.$$

これを 10 の累乗と比較するために、$2^{10} = 1024 > 10^3$ を用いる。

$$2^{2047} > 2^{2040} = \left(2^{10}\right)^{204} > \left(10^3\right)^{204} = 10^{612} > 10^{600}.$$

よって $y_{10} - \sqrt{2} < 2^{-2047} < 10^{-600}$ であり、まとめると

$$\sqrt{2} \leq y_{10} \leq \sqrt{2} + 10^{-600}.$$

? **考えてみよう** (ii) の驚異的な速さはどこから来るのか？

(i) では誤差は毎回高々 $\frac{1}{4}$ 倍されるだけなので、10 段階で得られるのは小数点以下およそ 6 桁にすぎない。(ii) では誤差は毎回（おおよそ）2 乗されるので、指数 2^n が倍々になる。10 段階で、誤差はおよそ $\frac{1}{10}$ から 10^{-600} 未満にまで小さくなる。

検算

- 最初のいくつかの項は $x_1 = \frac{3}{2}$、$x_2 = \frac{7}{5}$、$x_3 = \frac{17}{12}$ であり、$x_n^2 - 2$ は -1, $\frac{1}{4}$, $-\frac{1}{25}$, $\frac{1}{144}$ と変化する。符号が交互に変わり、毎回少なくとも 4 分の 1 に小さくなっている。
- 分数で厳密に計算すると $x_{10}^2 \approx 2 - 3.0 \times 10^{-8}$ であり、区間 $[2 - 10^{-6}, 2]$ に余裕をもって収まっている。
- $y_2 = \frac{17}{12}$ であるから $y_2 - \sqrt{2} \approx 0.00245$ であり、評価 $2r^4 \approx 0.00368$ と比べて小さい。厳密な分数を用いたコンピュータでの確認では $y_{10} - \sqrt{2} \approx 10^{-783}$ となり、保証された $2^{-2047} \approx 10^{-616}$ を大きく下回る。

よくある間違い

- (i)(c) で符号を考え忘れること。絶対値の評価だけからは $2 - 10^{-6} \le x_{10}^2 \le 2 + 10^{-6}$ しか得られない。上界 2 を得るには符号が交互に変わることが必要である。
- $e_n \ge 0$ を確認しないまま $e_n \le 2r^{2^n}$ を 2 乗すること。
- 2^{-2047} で止めてしまい、実際に 10^{-600} と比較しないこと。不等式 $2^{10} > 10^3$ を使うのが最もすっきりした方法である。

STEP のその先へ

(ii) の漸化式は $f(y) = y^2 - 2$ にニュートン（Newton）法（Newton's method）を適用したものであり、(ii)(a) の恒等式は、ニュートン法が単根の近くで **2 次収束**（quadratic convergence）するという事実を表している。一方、(i) は収束率が高々 $\frac{1}{4}$ の **1 次収束**（linear convergence）の例である。また、数 x_n は $\sqrt{2}$ の連分数（continued fraction）の近似分数（convergents）でもある。収束の次数（order of convergence）と不動点反復（fixed-point iteration）は、大学で最初に学ぶ数値解析（numerical analysis）の講義の標準的な話題であり、その背後にある解析学は Bartle and Sherbert, *Introduction to Real Analysis*（実解析入門）で丁寧に展開されている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。