解答例

# STEP II 2023、第 4 問

純粋数学 • 多項式からの根号の消去

> **STEP II 2023、問 4**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は、OCR が配布している 2023 年の STEP 過去問一式（zip ファイル）のうち、STEP II の問題用紙にある：
>
> www.ocr.org.uk/Images/707102-2023-past-papers.zip

この問題は、*Beyond STEP* の第 6.3 節「$\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}$ を根にもつ多項式」で詳しく解説されている：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/ch06/field-extensions.html

## 鍵となる考え方

方程式から根号（surd）を消すには、根号を含むものをすべて一方の辺に、それ以外をもう一方の辺に集め、両辺を 2 乗（あるいは 3 乗）する。どの小問も同じ手順である。数を「扱いやすい部分と根号の和」の形に書き、その根号を一方の辺に孤立させ、根号が消えるまで累乗する。展開した後にも根号が残る場合は、その項を一方の辺に集めて同じことを繰り返す。

## 解答

### 小問 (i)

$(x-\sqrt{2})^2=3$ を展開すると $x^2-2\sqrt{2}\,x+2=3$、すなわち

$$x^2-1=2\sqrt{2}\,x.$$

となる。これで根号が一方の辺に孤立したので、両辺を 2 乗する。

$$x^4-2x^2+1=8x^2 \quad\Longrightarrow\quad x^4-10x^2+1=0,$$

これが示すべき式である。（2 乗すると一方向の含意しか得られないが、ここではそれで十分である。最初の方程式を満たすすべての $x$ は、2 番目の方程式も満たす。）

後半の結論を導くため、$x=\sqrt{2}+\sqrt{3}$ とおく。すると $x-\sqrt{2}=\sqrt{3}$ であるから

$(x-\sqrt{2})^2=3$ となり、いま示したことから $\mathrm{f}(\sqrt{2}+\sqrt{3})=0$ である。

**小問 (ii)**

$x=\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}$、$y=x-\sqrt{5}=\sqrt{2}+\sqrt{3}$ とおく。小問 (i) より $y^4-10y^2+1=0$ である。これを $x$ で書き直す。まず

$$y^2=(x-\sqrt{5})^2=(x^2+5)-2\sqrt{5}\,x,$$

であり、したがって

$$\begin{aligned}y^4&=(x^2+5)^2-4\sqrt{5}\,x(x^2+5)+20x^2\\&=x^4+30x^2+25-4\sqrt{5}\,x^3-20\sqrt{5}\,x.\end{aligned}$$

ゆえに

$$\begin{aligned}0&=y^4-10y^2+1\\&=\left(x^4+30x^2+25-4\sqrt{5}\,x^3-20\sqrt{5}\,x\right)-10\left(x^2+5-2\sqrt{5}\,x\right)+1\\&=x^4+20x^2-24-4\sqrt{5}\,x^3.\end{aligned}$$

都合のよいことに、$\sqrt{5}\,x$ の項は打ち消し合う。根号を含む項は一つしか残らないので、それを孤立させて 2 乗する。

$$x^4+20x^2-24=4\sqrt{5}\,x^3 \quad\Longrightarrow\quad (x^4+20x^2-24)^2=80x^6.$$

左辺を展開すると

$$\begin{aligned}(x^4+20x^2-24)^2&=x^8+40x^6+400x^4-48x^4-960x^2+576\\&=x^8+40x^6+352x^4-960x^2+576.\end{aligned}$$

$80x^6$ を引けば、

$$\mathrm{g}(x)=x^8-40x^6+352x^4-960x^2+576,$$

ととることができる。これは次数（degree）8 で整数係数（integer coefficients）をもち、$\mathrm{g}(\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5})=0$ を満たす。

**考えてみよう** 一から始めるのではなく、$\sqrt{2}+\sqrt{3}$ について小問 (i) を利用し、$\sqrt{5}$ を最後に消去するのはなぜか？

小問 (i) ですでに三つの根号のうち二つが消えているので、残り一つを処理すればよい。根号を一つ 2 乗で消すと次数は 2 倍になり、4 から 8 になる。これはちょうど求められている次数である。一から始めると、三つの根号すべてを同時に扱わなければならない。

### 小問 (iii)

$x = a + \sqrt{2}$ とおくと $a = x - \sqrt{2}$ であり、$a^3 - 3a + 1 = 0$ である。展開すると

$$(x - \sqrt{2})^3 = x^3 - 3\sqrt{2}\,x^2 + 6x - 2\sqrt{2},$$

であるから

$$0 = (x - \sqrt{2})^3 - 3(x - \sqrt{2}) + 1 = x^3 + 3x + 1 - \sqrt{2}\,(3x^2 - 1).$$

根号を孤立させて 2 乗する。

$$x^3 + 3x + 1 = \sqrt{2}\,(3x^2 - 1) \quad \Longrightarrow \quad (x^3 + 3x + 1)^2 = 2(3x^2 - 1)^2.$$

両辺はそれぞれ

$$(x^3 + 3x + 1)^2 = x^6 + 6x^4 + 2x^3 + 9x^2 + 6x + 1,$$
$$2(3x^2 - 1)^2 = 18x^4 - 12x^2 + 2,$$

となるので、

$$\mathrm{h}(x) = x^6 - 12x^4 + 2x^3 + 21x^2 + 6x - 1.$$

ととることができる。ここで用いたのは $a$ が $t^3 - 3t + 1 = 0$ を満たすという事実だけであるから、同じ計算が $b$ と $c$ にもそのまま当てはまる。よって $\mathrm{h}(a + \sqrt{2}) = \mathrm{h}(b + \sqrt{2}) = \mathrm{h}(c + \sqrt{2}) = 0$ である。

### 小問 (iv)

2 乗しても 3 乗根は消えないので、別の恒等式が必要である。$p = \sqrt[3]{2}$、$q = \sqrt[3]{3}$、$x = p + q$ とおく。二項展開（binomial expansion）により

$$x^3 = p^3 + q^3 + 3pq(p + q) = 5 + 3pq\,x.$$

**考えてみよう** まだ無理数である $pq$ はどうすれば消せるか？

ここで残っている無理数は $pq = \sqrt[3]{6}$ だけであり、しかもそれは因数としてしか現れない。これを孤立させ、$(pq)^3 = 6$ を用いて 3 乗する。

$$x^3 - 5 = 3pq\,x \quad \Longrightarrow \quad (x^3 - 5)^3 = 27 \cdot 6\,x^3 = 162x^3.$$

$(x^3 - 5)^3 = x^9 - 15x^6 + 75x^3 - 125$ であるから、

$$\mathrm{k}(x) = x^9 - 15x^6 - 87x^3 - 125,$$

ととることができる。これは整数係数をもち、$\mathrm{k}(\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{3}) = 0$ を満たす。

## 検算

- 小問 (ii) において、$\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5} \approx 5.38233$ である。$x^2 \approx 28.9695$ から $x^8 \approx 704\,310$、$40x^6 \approx 972\,485$ を得る。さらに $352x^4 \approx 295\,410$、$960x^2 \approx 27\,811$ であり、g の各項は丸め誤差の範囲で打ち消し合う。
- $\sqrt{2}$、$\sqrt{3}$、$\sqrt{5}$ の符号をどう変えても $\mathrm{g}(x)$ は変わらないので、$\pm\sqrt{2}\pm\sqrt{3}\pm\sqrt{5}$ の八つの数はすべて根である。これで次数が 8 であることの説明がつく。同様に、h は六つの根 $a\pm\sqrt{2}$、$b\pm\sqrt{2}$、$c\pm\sqrt{2}$ をもつ。
- $t^3-3t+1=0$ の根は $2\cos 40^\circ$、$2\cos 160^\circ$、$2\cos 280^\circ$ である。たとえば $a \approx 1.53209$ から $a+\sqrt{2} \approx 2.94630$ となり、$\mathrm{h}(2.94630)$ は丸め誤差の範囲で零である。
- 小問 (iv) において、$\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{3} \approx 2.70217$ であり、$\mathrm{k}(2.70217)$ は丸め誤差の範囲で零である。コンピュータによる検算で、四つの多項式（polynomial）すべてが約 $10^{-10}$ の精度で確認された。

## よくある間違い

- 根号を孤立させる前に 2 乗してしまう。$\sqrt{5}$ を含む項が両辺に残っていると、それらは打ち消し合わない。
- 小問 (iv) で 2 乗しようとしたり、$x^3=5+3pqx$ に気づかないまま $x$ を 3 乗したりする。展開式 $(p+q)^3=p^3+q^3+3pq(p+q)$ こそが解法の要である。
- 小問 (iii) の 3 次式の展開での符号の誤り。特に定数項 $-2\sqrt{2}+3\sqrt{2}=\sqrt{2}$ に注意する。

## STEP のその先へ

整数係数の多項式の根となる数を**代数的**（algebraic）であるという。この問題は、代数的数の和が代数的であることを手計算で示している。一般の場合の証明には線形代数（linear algebra）を用いる。$\mathbb{Q}(\alpha,\beta)$ は $\mathbb{Q}$ 上の有限次元ベクトル空間（finite-dimensional vector space）である。したがって、累乗 $1, \alpha+\beta, (\alpha+\beta)^2, \ldots$ はいずれ線形従属（linearly dependent）にならなければならない。ここに現れた次数 4、8、6、9 は、これらの**体の拡大**（field extensions）の次元である。さらに詳しくは、Allenby, *Rings, Fields and Groups*（環・体・群）を参照されたい。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。