解答例

STEP II 2023、第 3 問

純粋数学 ・ 多項式と導関数

> **STEP II 2023、問 3**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は、OCR が配布している 2023 年の STEP 過去問一式（zip ファイル）のうち、STEP II の問題用紙にある：
>
> www.ocr.org.uk/Images/707102-2023-past-papers.zip

鍵となる考え方

q を微分すると、和の各項がちょうど一つずつずれ、最後の導関数は消える。したがって $q' = q - p$ である。この一つの関係式がすべてを動かしている。$q > 0$ の三通りの証明は、この関係式を三通りに読むものである。すなわち、停留点（stationary point）についての事実として、$\mathrm{e}^{-x}q(x)$ の導関数（積分因子（integrating factor））として、そして部分積分（integration by parts）を何度も繰り返して得られる積分表示として読むのである。

解答

以下を通して、$p(x) = ax^n + \ldots$（ただし $a \neq 0$）と書く。$k \geq 1$ に対して $p^{(k)}$ の次数は n 未満である（または零である）。また $p^{(n+1)} \equiv 0$ である。

小問 (i)

(a) 奇数次の多項式は、実数直線の一方の端で $+\infty$ に、もう一方の端で $-\infty$ に発散する。多項式は連続であるから、中間値の定理（intermediate value theorem）により、どこかで値 0 をとる。しかしすべての x に対して $p(x) > 0$ であるから、p は実数解をもたない。よって n は偶数でなければならない。

また $a > 0$ である。実際、$a < 0$ ならば $x \to \infty$ のとき $p(x) \to -\infty$ となり、$p > 0$ に矛盾する。$q = p + p' + \cdots + p^{(n)}$ において、第 2 項以降の各項の次数は n 未満であるから、q もまた次数 n で、最高次の係数（leading coefficient）は $a > 0$ である。したがって $x \to \infty$ のとき $q(x) \to +\infty$ である（さらに n は偶数なので、$x \to -\infty$ のときも同様

である)。よって q は確かに正の値をとる。($n=0$ のときは、$q=p$ は正の定数である。)

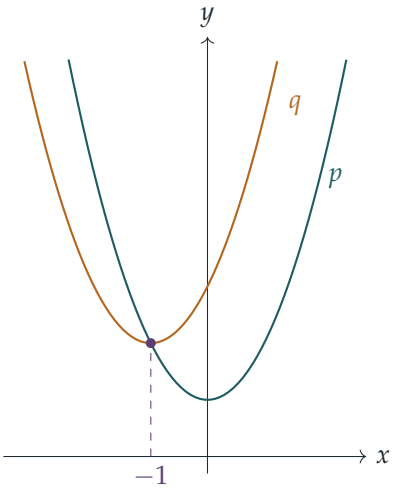
(b) 項別に微分すると、

$$q'(x)=\sum_{k=0}^{n}p^{(k+1)}(x)=\sum_{k=1}^{n+1}p^{(k)}(x)=\sum_{k=0}^{n}p^{(k)}(x)-p(x)+p^{(n+1)}(x)=q(x)-p(x),$$

となる。ここで、次数 n の多項式に対しては $p^{(n+1)}\equiv 0$ であることを用いた。

小問 (ii)

(a) $y=q(x)$ の停留点 x_0 においては $q'(x_0)=0$ であるから、(i)(b) により $q(x_0)=p(x_0)$ となる。すなわち、二つの曲線はそこで交わる。



(図は $p(x)=x^2+1$ の場合であり、このとき $q(x)=x^2+2x+3$ である。q の最小値は $x=-1$ でとられ、そこはちょうど二つの曲線が交わる点である。)

次に $q>0$ を示す。$n=0$ ならば $q=p>0$ であるから、$n\geq 2$ と仮定する。(i)(a) により $x\to\pm\infty$ のとき $q(x)\to+\infty$ であるから、$|x|>R$ ならば常に $q(x)>q(0)$ となるような $R>0$ をとることができる。

考えてみよう そもそも q に最も低い点があること、そしてそれが停留点であることは、どうしてわかるのだろうか？

閉区間 (closed interval) $[-R,R]$ 上で、連続 (continuous) 関数 q はある点 x_0 で最小値をとり、$q(x_0)\leq q(0)$ である。この区間の外では q は $q(0)$ より大きいから、$q(x_0)$ は実数全体における q の最小値である。x_0 は $\mathbb{R}$ の内点であり、q は微分可能 (differentiable) であるから、$q'(x_0)=0$ である。最初の結果により $q(x_0)=p(x_0)>0$ となる。よって

すべての x に対して

$$q(x) \geq q(x_0) = p(x_0) > 0.$$

(b) (i)(b) を用いると、

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\mathrm{e}^{-x}q(x)) = \mathrm{e}^{-x}(q'(x) - q(x)) = -\mathrm{e}^{-x}p(x) < 0$$

がすべての x に対して成り立つ。これは $p > 0$ による。よって $\mathrm{e}^{-x}q(x)$ は（狭義（strictly））単調減少である。

$q > 0$ について：q は多項式であるから、$X \to \infty$ のとき $\mathrm{e}^{-X}q(X) \to 0$ である（指数関数はべき関数に勝つ）。単調減少関数は $+\infty$ における極限より小さくなることはないから、すべての X に対して $\mathrm{e}^{-X}q(X) \geq 0$ である。すると任意の x に対して、狭義単調減少性から

$$\mathrm{e}^{-x}q(x) > \mathrm{e}^{-(x+1)}q(x+1) \geq 0,$$

が得られ、両辺に $\mathrm{e}^{x} > 0$ を掛けると $q(x) > 0$ を得る。

(c) ここに現れる積分はすべて収束（converge）する。t の多項式と e^{-t} の積は $[0,\infty)$ 上で積分可能だからである。x を定数とみなし、$u = p(x+t)$、$\mathrm{d}v = \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$ として部分積分すると、

$$\begin{aligned}\int_0^\infty p(x+t)\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t &= \left[-p(x+t)\mathrm{e}^{-t}\right]_0^\infty + \int_0^\infty p^{(1)}(x+t)\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t \\ &= p(x) + \int_0^\infty p^{(1)}(x+t)\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t,\end{aligned}$$

となる。ここで、$t \to \infty$ のとき $p(x+t)\mathrm{e}^{-t} \to 0$ であることを用いた。これが一つ目の結果である。

この計算では、p について多項式であること以外は何も用いていない。したがって、すべての導関数に対して同じことが成り立つ。すなわち、

$$I_k(x) = \int_0^\infty p^{(k)}(x+t)\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t, \qquad \text{とおくと} \qquad I_k(x) = p^{(k)}(x) + I_{k+1}(x)$$

が $k = 0, 1, \ldots, n$ に対して成り立つ。また $p^{(n+1)} \equiv 0$ であるから $I_{n+1}(x) = 0$ である。この関係を繰り返し用いると、

$$I_0(x) = p(x) + I_1(x) = p(x) + p^{(1)}(x) + I_2(x) = \cdots = \sum_{k=0}^{n} p^{(k)}(x) + I_{n+1}(x) = q(x),$$

となり、これが二つ目の結果である。

考えてみよう なぜこの式によって $q(x) > 0$ が明らかになるのだろうか？

各 x を固定すると、被積分関数（integrand）$p(x+t)\mathrm{e}^{-t}$ はすべての $t \geq 0$ に対して連続かつ正である。これは至るところで $p > 0$ だからである。正の長さをもつ区間上での、

連続かつ常に正の関数の積分は正である。よってすべての x に対して $q(x) = I_0(x) > 0$ である。

検算

- $p(x) = x^2 + 1$ のとき $q(x) = x^2 + 2x + 3 = (x+1)^2 + 2$ となる。実際 $q' = 2x + 2 = q - p$ であり、q の最小値は $x = -1$ における 2 で、(ii)(a) が予言するとおり $p(-1) = 2$ である。
- 同じ p について、$x = 0$ では $\int_0^\infty (t^2+1)\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = 2! + 1 = 3 = q(0)$ である。
- コンピュータを用いて、次数 6 以下で至るところ正となるランダムな多項式 300 個について、$q' = q - p$ が厳密に成り立つこと、$[-20, 20]$ 上の格子点で $q > 0$ かつ $\mathrm{e}^{-x}q(x)$ が減少すること、そして数値積分が $q(x)$ を有効数字約 10 桁で再現することを確認した。

よくある間違い

- (ii)(a) で、理由を述べずに最小値の存在を仮定してしまう。最小値の存在には両端で $q \to +\infty$ となることが必要であり、それには (i)(a) で得た n が偶数であることと $a > 0$ を用いる。
- (ii)(b) で、極限から $\mathrm{e}^{-x}q(x) \geq 0$ だけを結論してしまう。これを $q(x) > 0$ に格上げするのは狭義単調減少性である。
- 境界項（boundary term）$p(x+t)\mathrm{e}^{-t}$ を捨てる前に、それが $t \to \infty$ のとき消えることを確かめるのを忘れる。

STEP のその先へ

(ii)(b) の関数 e^{-x} は積分因子であり、(ii)(c) は $q' - q = -p$ を陽に解いている。式 $\int_0^\infty p(x+t)\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$ はラプラス変換（Laplace transform）型の積分であり、D を微分を表すものとしたときの恒等式 $q = (1 + D + D^2 + \cdots)p = (1 - D)^{-1}p$ は、線形微分方程式（linear differential equations）に対する作用素の方法（operator methods）への最初の入口である。Boyce と DiPrima の *Elementary Differential Equations*（初等微分方程式）は積分因子とラプラス変換を扱っている。Abbott の *Understanding Analysis*（解析学を理解する）は、(ii)(a) の最大値・最小値の定理（extreme value theorem）による議論を厳密にしている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。