解答例

STEP II 2023、第 2 問

純粋数学 • 三角関数による置換

> **STEP II 2023、問 2**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は、OCR が配布している 2023 年の STEP 過去問一式（zip ファイル）のうち、STEP II の問題用紙にある：
>
> www.ocr.org.uk/Images/707102-2023-past-papers.zip

鍵となる考え方

各右辺は、見慣れた倍角の公式（multiple-angle formula）が姿を変えたものである。$t = \tan\alpha$ のとき $\frac{2t}{1-t^2}$ は $\tan 2\alpha$ であり、$\frac{3t-t^3}{1-3t^2}$ は $\tan 3\alpha$ である。また $t = \cos\alpha$ のとき $2t^2 - 1$ は $\cos 2\alpha$ である。置換（substitution）を行うと、連立した 3 つの方程式は 1 つの角についてのただ 1 つの三角方程式になる。これは解きやすく、しかも肝心なことに、解の個数を**数え**やすい。注意すべきなのは、この置換がすべての解をちょうど 1 回ずつ捉えていることを確かめる点だけである。

解答

小問 (i)

すべての実数は、$(-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi)$ 内のちょうど 1 つの α に対する $\tan\alpha$ として表せる。したがって、α をこの区間にとって $x = \tan\alpha$ とおいても何も失わない。第 1 式が意味をもつには $x \neq \pm 1$ が必要であり、これは $\alpha \neq \pm\frac{1}{4}\pi$ ということである。よって 2α は $\frac{1}{2}\pi$ の奇数倍ではなく、2 倍角の公式（double-angle formula）が使える。

$$y = \frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha} = \tan 2\alpha.$$

まったく同じ手順を $y = \tan 2\alpha$ に適用すると（z が定義されているので $y \neq \pm 1$ である）$z = \tan 4\alpha$ が得られ、さらに z に適用すると（$z \neq \pm 1$ である）$x = \tan 8\alpha$ が得られる。一方 $x = \tan\alpha$ でもあるから、

$$\tan\alpha = \tan 8\alpha,$$

となり、示すべき式が得られた。2 つの角の正接（tangent）が等しいのは、それらの差が π の整数倍であるときに限る。よって、ある整数 k に対して $8\alpha = \alpha + k\pi$、すなわち

$$\alpha = \frac{k\pi}{7}.$$

である。条件 $-\frac{1}{2}\pi < \alpha < \frac{1}{2}\pi$ は $-\frac{7}{2} < k < \frac{7}{2}$ を意味するので、$k = -3, -2, \ldots, 3$ である。

逆に、これら 7 つの値はいずれも本当に解を与える。$2\alpha = \frac{2k\pi}{7}$ と $4\alpha = \frac{4k\pi}{7}$ は決して $\frac{1}{2}\pi$ の奇数倍にならない（そうなるには $4k$ または $8k$ が 7 と奇数の積に等しくなければならず、したがって $7 \mid k$ となって $k = 0$ に限られるが、そのときの値は 0 であって奇数倍ではない）。よって x, y, z のいずれも ± 1 に等しくなく、分母はどれも零にならず、上の推論の連鎖は逆にたどることができる。異なる k は $(-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi)$ 内の異なる α を与え、したがって異なる x を与える。ゆえに解はちょうど 7 個である。

求められた形で答えるには、$\tan(\theta - \pi) = \tan\theta$ を用いて、2α と 4α から π の整数倍を引き、$(-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi)$ に入れればよい。たとえば $\tan\frac{4\pi}{7} = \tan(-\frac{3\pi}{7})$、$\tan\frac{8\pi}{7} = \tan\frac{\pi}{7}$ である。$t_m = \tan\frac{m\pi}{7}$ と書くと、解 (x, y, z) は次のとおりである。

k	(x, y, z)
0	$(0, 0, 0)$
1	$(t_1,\ t_2,\ t_{-3})$
2	$(t_2,\ t_{-3},\ t_1)$
3	$(t_3,\ t_{-1},\ t_{-2})$

k	(x, y, z)
-1	$(t_{-1},\ t_{-2},\ t_3)$
-2	$(t_{-2},\ t_3,\ t_{-1})$
-3	$(t_{-3},\ t_1,\ t_2)$

$(0, 0, 0)$ を除くと、解は (t_1, t_2, t_{-3}) の巡回的な並べ替えと (t_{-1}, t_{-2}, t_3) の巡回的な並べ替えとして現れていることに注意しよう。連立方程式は $x \to y \to z \to x$ という入れ替えで変わらないので、これは当然である。

小問 (ii)

まず 3 倍角の公式（triple-angle formula）を導く。$t = \tan\alpha$ とすると、

$$\tan 3\alpha = \frac{\tan 2\alpha + \tan\alpha}{1 - \tan 2\alpha \tan\alpha} = \frac{\frac{2t}{1-t^2} + t}{1 - \frac{2t^2}{1-t^2}} = \frac{2t + t - t^3}{1 - t^2 - 2t^2} = \frac{3t - t^3}{1 - 3t^2}.$$

前と同様に、$-\frac{1}{2}\pi < \alpha < \frac{1}{2}\pi$ として $x = \tan\alpha$ とおく。方程式が意味をもつには $1 - 3x^2$、$1 - 3y^2$、$1 - 3z^2$ が零でないことが必要であり、そのもとでこの公式から順に $y = \tan 3\alpha$、$z = \tan 9\alpha$、$x = \tan 27\alpha$ が得られる。よって $\tan\alpha = \tan 27\alpha$ であり、$26\alpha = k\pi$、すなわち

$$\alpha = \frac{k\pi}{26}, \qquad -13 < k < 13.$$

となる。これで α の候補は 25 個あり、それらはすべて異なる x の値を与える。

考えてみよう これら 25 個の候補の中に、分母を零にしてしまい、実際には解でないものがありうるだろうか？

ここが確認すべき点である。分母 $1-3\tan^2\beta$ は $\beta \equiv \pm\frac{1}{6}\pi \pmod{\pi}$ のとき零になり、また β が $\frac{1}{2}\pi$ の奇数倍のときは正接そのものが定義されない。ここで現れる角は、$j=0,1,2$ に対する $\beta = 3^j \cdot \frac{k\pi}{26}$ である。

- $3^j k\pi/26 = \pm\frac{1}{6}\pi + m\pi$ とすると $3^{j+1}k = \pm 13 + 78m$ となる。左辺は 3 の倍数であるが、右辺はそうではない（78 は 3 の倍数であり、13 はそうでないから）。よってありえない。
- $3^j k\pi/26 = \frac{1}{2}(2m+1)\pi$ とすると $3^j k = 13(2m+1)$ となるので、13 は k を割り切り、$k=0$ に限られる。しかしそのとき左辺は 0 であり、これは 13 の奇数倍ではない。よってありえない。

したがって、すべての候補は本当に解であり、連立方程式はちょうど 25 個の実数解をもつ。（区間から除かれる値 $k=\pm 13$ は $\alpha = \pm\frac{1}{2}\pi$ に対応し、そこでは $\tan\alpha$ が存在しない。）

小問 (iii)(a)

今度は $|x| \le 1$ なので、ちょうど 1 つの $\alpha \in [0,\pi]$ を用いて $x = \cos\alpha$ と書ける。2 倍角の公式 $\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$ から $y = \cos 2\alpha$ が得られ、続いて $z = \cos 4\alpha$、$x = \cos 8\alpha$ が得られる。これらは自動的に $|y| \le 1$ と $|z| \le 1$ を満たす。したがって、3 つとも $[-1,1]$ に属する解は、次を満たす $\alpha \in [0,\pi]$ とちょうど対応する。

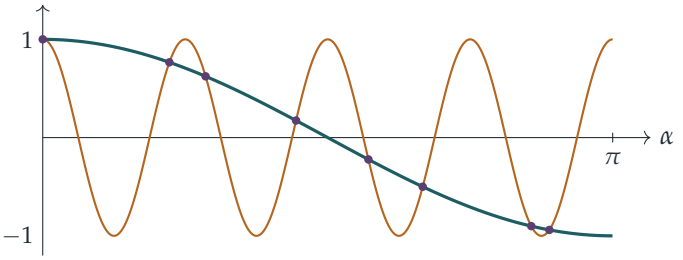
$$\cos 8\alpha = \cos\alpha.$$

2 つの角の余弦が等しいのは、2π の整数倍の差を除いて、両者が等しいか符号が逆であるときに限る。よって

$$8\alpha = \alpha + 2m\pi \quad \text{または} \quad 8\alpha = -\alpha + 2n\pi, \qquad \text{すなわち} \qquad \alpha = \frac{2m\pi}{7} \quad \text{または} \quad \alpha = \frac{2n\pi}{9}.$$

$[0,\pi]$ において、第 1 の族からは $m=0,1,2,3$、すなわち $0, \frac{2\pi}{7}, \frac{4\pi}{7}, \frac{6\pi}{7}$ が得られ、第 2 の族からは $n=0,1,2,3,4$、すなわち $0, \frac{2\pi}{9}, \frac{4\pi}{9}, \frac{6\pi}{9}, \frac{8\pi}{9}$ が得られる。重なるのは $\alpha=0$ のみである（共通の値があるとすれば $\frac{m}{7} = \frac{n}{9}$、すなわち $9m = 7n$ が必要であり、$7 \mid m$ となる）。よって α の相異なる値は $4+5-1=8$ 個である。余弦は $[0,\pi]$ 上で単射（one-to-one）なので、これらは 8 個の相異なる x の値を与え、それぞれが y と z を定める。したがって、$|x|, |y|, |z| \le 1$ を満たす解はちょうど 8 個である。

図は、$[0,\pi]$ 上で $\cos 8\alpha$（琥珀色）と $\cos\alpha$（青緑色）が交わる 8 つの点を示している。



小問 (iii)(b)

今度は制限を外す。y と z を消去しよう。$y = 2x^2 - 1$ は x の 2 次式なので、$z = 2y^2 - 1$ は x の 4 次多項式であり、そして $x = 2z^2 - 1$ は

$$x = 2\Big(2\big(2x^2 - 1\big)^2 - 1\Big)^2 - 1,$$

となる。これは x についての 8 次の多項式方程式である（右辺の最高次の項は $2 \cdot (2 \cdot 2^2)^2 x^8 = 128x^8$ であり、これを打ち消すものはない）。展開すると

$$128x^8 - 256x^6 + 160x^4 - 32x^2 - x + 1 = 0.$$

となる。連立方程式の任意の解 (x, y, z) について、x はこの 8 次方程式の根であり、x が y と z を定める。8 次の多項式は高々 8 個の実数根しかもたないが、(a) ですでに 8 個の相異なる実数根、すなわちそこで求めた 8 つの α の値に対する $\cos\alpha$ が得られている。よってこれらが根の**すべて**であり、連立方程式のどの解も (a) の 8 つのいずれかである。特に、どの解も $|x| \le 1$、$|y| \le 1$、$|z| \le 1$ を満たす。これが示すべきことであった。

> ? **考えてみよう** なぜ (b) では、(a) の 8 つの解だけでなく次数が必要なのだろうか？

(a) で求めたのは $[-1, 1]$ 内の解だけであり、それだけでは、たとえば $x = 5$ については何もわからない。それ以外の解を排除するのが次数による上限である。8 次方程式がもちうる根は 8 個までであり、(a) でそれを使い切っているのである。

検算

- (i) で $k = 1$ のとき：$\tan\frac{\pi}{7} \approx 0.4816$ であり、$\frac{2(0.4816)}{1-0.4816^2} \approx 1.2540 = \tan\frac{2\pi}{7}$ となる。さらに 2 ステップで 0.4816 に戻る。
- コンピュータで実数直線上を $f(f(f(x))) = x$ の根について探索したところ、$f(t) = \frac{2t}{1-t^2}$ に対してはちょうど 7 個、$f(t) = \frac{3t-t^3}{1-3t^2}$ に対してはちょうど 25 個の根が見つかり、後者は $\tan\frac{k\pi}{26}$、$|k| \le 12$ と一致した。

- (iii) では、$x = 1$ から $y = z = 1$ が得られ、これは $\alpha = 0$ の解である。実際 $128 - 256 + 160 - 32 - 1 + 1 = 0$ である。$[-50, 50]$ でこの 8 次方程式の根を探索したところ、ちょうど 8 個見つかり、すべて $[-1, 1]$ 内にあった。

よくある間違い

- (ii) で $k = \pm 13$ を許してしまう（あるいは α をまったく制限しない）ことで、解を 27 個としてしまう。$\alpha = \pm\frac{1}{2}\pi$ はどの実数 x にも対応しない。
- (iii)(a) で第 2 の族 $8\alpha = -\alpha + 2n\pi$ を忘れる、あるいは $\alpha = 0$ を 2 回数える。
- (i) で、角は $(-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi)$ に入っていなければならないのに、$\tan\frac{4\pi}{7}$ のような答えを変形しないまま残す。

STEP のその先へ

$T_n(\cos\alpha) = \cos n\alpha$ を満たす多項式 T_n は**チェビシェフ多項式**（Chebyshev polynomials）である。小問 (iii) は方程式 $T_8(x) = x$ であり、上の 8 次式は $T_8(x) - x$ にほかならない。$x \mapsto 2x^2 - 1$ のような写像を反復し、3 ステップ後に戻ってくる点を求めることは、力学系（dynamical systems）の理論の出発点である。この写像は $[-1, 1]$ 上で「カオス的」（chaotic）であり、角による置換によって単純な倍角写像 $\alpha \mapsto 2\alpha$ に変わる。同じ工夫により、(i) と (ii) の正接写像がなぜこれほど多くの周期点（periodic points）をもつのかも説明できる。Siklos の *Advanced Problems in Mathematics*（数学の発展問題集）には、この趣旨の問題がさらに収められている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。