解答例

STEP II 2023、第 10 問

力学 ・ 放物運動の包絡線

> **STEP II 2023、問 10**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は、OCR が配布している 2023 年の STEP 過去問一式（zip ファイル）のうち、STEP II の問題用紙にある：
>
> www.ocr.org.uk/Images/707102-2023-past-papers.zip

鍵となる考え方

軌道（trajectory）と曲線 E が**接する**（touch）のは、共有点を求める方程式が重解（repeated root）をもつときであり、またそのときに限る。したがって小問 (i) は判別式（discriminant）の計算である。これがすべての角度について成り立つことを要求すると、E はすべての軌道の**包絡線**（envelope）、すなわち速さ u の粒子が到達できる範囲の境界でなければならなくなる。問題の残りの部分では、この境界を三つの観点から調べる。どの点に到達できるか、決まった時刻に粒子がどこにあるか、そして包絡線そのものに沿って滑る第二の粒子である。

解答

以下を通して、粒子は空気抵抗（air resistance）のない重力のもとで自由に運動する点としてモデル化し、$c = \cos\alpha, s = \sin\alpha$ とおく。

小問 (i)

投射からの時間を t とすると、P_α は平面 $y = 0$ 内にとどまり、

$$x = uct, \qquad z = ust - \tfrac{1}{2}gt^2.$$

$t = x/(uc)$ を用いて t を消去すると、軌道は

$$z = x\tan\alpha - \frac{gx^2}{2u^2c^2}.$$

E との共有点は $A - Bx^2 = x\tan\alpha - \dfrac{gx^2}{2u^2c^2}$ を満たす。すなわち

$$\left(\frac{g}{2u^2c^2} - B\right)x^2 - x\tan\alpha + A = 0. \qquad (*)$$

もし x^2 の係数が 0 であれば、$\tan\alpha \neq 0$ より $(*)$ は 1 次方程式となり、接するのではなく 1 回交わるだけになる。よって $(*)$ は真の 2 次方程式である。二つの曲線がちょうど 1 回接するのは $(*)$ が重解をもつとき、すなわち判別式が 0 になるときである：

$$\tan^2\alpha = 4A\left(\frac{g}{2u^2c^2} - B\right).$$

両辺に u^2c^2 を掛けると

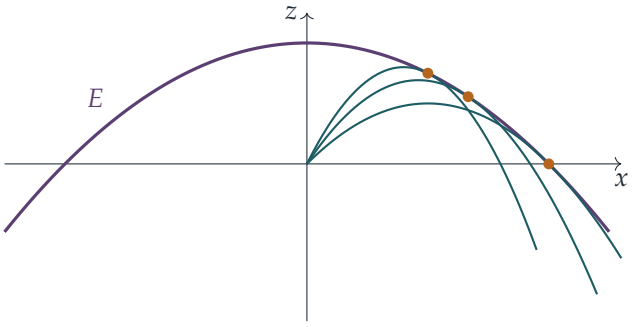
$$\begin{aligned} u^2s^2 &= 2gA - 4ABu^2c^2 \\ u^2 - u^2c^2 &= 2gA - 4ABu^2c^2 \qquad (s^2 = 1 - c^2 \text{ を用いた}) \\ u^2 - 2gA &= u^2(1 - 4AB)\cos^2\alpha, \end{aligned}$$

となり、示すべき式が得られる。

これが $(0, \frac{1}{2}\pi)$ 内のすべての α について成り立つならば、左辺は定数である一方、$\cos^2\alpha$ は $(0,1)$ 内のあらゆる値をとる。これらすべての値に対して定数が $k\cos^2\alpha$ に等しいならば $k = 0$ でなければならず、そのとき定数は 0 である。よって $u^2 = 2gA$ かつ $4AB = 1$ であり、

$$A = \frac{u^2}{2g}, \qquad B = \frac{g}{2u^2}.$$

逆に、これらの値のもとでは恒等式はすべての α について成り立つ。接点は重解 $x = \dfrac{\tan\alpha}{2(g/(2u^2c^2) - B)} = \dfrac{u^2}{g\tan\alpha}$ で与えられる。



図（$u^2/g = 2$ として描いたもの）は、三つの軌道がそれぞれ琥珀色の点で E に 1 回ずつ接する様子を示している。

小問 (ii)

各粒子は初速度を含む鉛直平面内を運動し、全体は z 軸に関して対称である。そこで、z 軸からの水平距離が r、高さが z である点をとり、その点を通る鉛直平面内で考える。投射角を、その点の方向へ水平面から上向きに測った角 $\theta \in (-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi)$ とする。

$r = 0$ のときは、真上または真下に打ち出された粒子しか到達できない。上向きに打ち出された粒子は高さ $u^2/(2g)$ までのすべての高さに達し、下向きに打ち出された粒子はすべての負の高さに達する。よって軸上で到達可能な点は $z \le u^2/(2g)$ を満たす点である。

$r > 0$ のときは、小問 (i) とまったく同様に、$1/\cos^2\theta = 1 + \tan^2\theta$ を用いると、粒子がその点を通るのは

$$z = r\tan\theta - \frac{gr^2}{2u^2}(1 + \tan^2\theta),$$

のときである。任意の実数値をとりうる $T = \tan\theta$ を用いると、これは2次方程式

$$\frac{gr^2}{2u^2}T^2 - rT + \left(z + \frac{gr^2}{2u^2}\right) = 0,$$

となり、これが実数解をもつのは、$2gr^2/u^2 > 0$ で割ることにより

$$r^2 \ge \frac{2gr^2}{u^2}\left(z + \frac{gr^2}{2u^2}\right) \iff z \le \frac{u^2}{2g} - \frac{gr^2}{2u^2},$$

のとき、かつそのときに限る。

したがって $r^2 = x^2 + y^2$ とすると、到達可能な点はちょうど回転放物面（paraboloid）

$$z = \frac{u^2}{2g} - \frac{g}{2u^2}(x^2 + y^2),$$

の上またはその下にある点であり、この曲面は（小問 (i) の値をもつ）E を z 軸のまわりに回転して得られる。曲面より真に下にある点には平面内の二つの方向から到達でき、曲面上の点にはちょうど一つの方向から到達でき（これは重解であり、小問 (i) の接することに対応する）、曲面より上の点にはどの方向からも到達できない。

小問 (iii)

粒子の初速度を $u\mathbf{n}$ とする。ただし $\mathbf{n}$ は単位ベクトルである。時間 t 後の位置は

$$\mathbf{r} = ut\,\mathbf{n} - \tfrac{1}{2}gt^2\,\mathbf{k},$$

である。ここで $\mathbf{k}$ は上向きの単位ベクトルである。したがって

$$|\mathbf{r} - (-\tfrac{1}{2}gt^2\,\mathbf{k})| = |ut\,\mathbf{n}| = ut.$$

よって時刻 t において、すべての粒子は中心 $(0,0,-\frac{1}{2}gt^2)$、半径 ut の球面上にある。物理的には次のように解釈できる。重力はすべての粒子を等しく加速させるので、原点から自由落下する点から見ると、すべての粒子は速さ u で直線的に外向きに飛んでいく。

小問 (iv)

Q が投射されてからの時間を τ とすると、Q は $y=0$ であり、

$$x = u\tau, \qquad z = A - \tfrac{1}{2}g\tau^2.$$

$\tau = x/u$ を代入すると

$$z = A - \frac{g}{2u^2}x^2 = A - Bx^2,$$

となる。ここで小問 (i) の $B = g/(2u^2)$ を用いた。よって Q は常に E 上にある。

小問 (v)

Q が爆発から時間 T 後に投射され、爆発から時間 t $(\geq T)$ 後に Q と P_α が同じ点にあるとする。このとき $\tau = t - T$ であり、y 座標はどちらも 0 なので、x 座標と z 座標が一致すればよい：

$$uct = u(t-T),$$
$$ust - \tfrac{1}{2}gt^2 = A - \tfrac{1}{2}g(t-T)^2.$$

第 1 式から $t - T = ct$、よって $T = t(1-c)$ である。第 2 式に $t - T = ct$ を代入し、$1 - c^2 = s^2$ を用いると

$$ust - \tfrac{1}{2}gs^2t^2 = A = \frac{u^2}{2g}.$$

考えてみよう 面倒な公式を使わずに、これを t について解くにはどうすればよいか？

両辺に $2g$ を掛けて一方の辺にまとめると $g^2s^2t^2 - 2gus\,t + u^2 = 0$ となり、これは完全平方式

$$(gst - u)^2 = 0, \qquad \text{よって} \qquad t = \frac{u}{g\sin\alpha}.$$

である。重解になるのはまさに予想どおりである。二つの経路が共有する点はそこしかないので、衝突は P_α の軌道が E に接する点で起こらなければならない。実際、そのとき P_α は $x = uct = u^2/(g\tan\alpha)$ にあり、これは小問 (i) で求めた接点である。したがって

$$T = t(1-\cos\alpha) = \frac{u(1-\cos\alpha)}{g\sin\alpha},$$

となり、示すべき式が得られる。$0 < 1 - \cos\alpha < 1$ であるから $0 < T < t$ となり、確かに Q は爆発の後、衝突の前に打ち出される。

検算

- 小問 (i) で $\alpha = \frac{1}{4}\pi$ とすると接点は $x = u^2/g, z = 0$ となる。これは水平な地面上での最大到達距離であり、到達可能領域の境界は確かにこの点を通るはずである。
- 小問 (ii) で、軸 $r = 0$ 上では条件は $z \le u^2/(2g)$ となり、これは真上に打ち出された粒子の最高点の高さである。
- 小問 (v) で $u = 7, g = 9.8, \alpha = 0.5$ とすると、公式から $T \approx 0.182$ が得られる。二つの運動を時間を追って数値的に進めると、粒子が $t = u/(g\sin\alpha) \approx 1.49$ で出会うこと、また Q の打ち出しを 0.05 遅らせるだけで粒子がすれ違ってしまうことが確かめられる。
- $\alpha \to \frac{1}{2}\pi$ のとき $T \to u/g$ かつ $t \to u/g$ となる。P_α はほぼ真上に上がって時刻 u/g に E の頂点 $(0, 0, A)$ に達し、ちょうどそのとき Q がそこから出発する。

よくある間違い

- 共有点の方程式を x についての一つの 2 次方程式に書き直さないまま判別式を 0 とおき、その結果 x^2 の係数から $-B$ の項を落としてしまう。
- 小問 (ii) で境界の曲面だけを答えてしまう。問題が求めているのは集合全体、すなわち回転放物面の上およびその下にある立体領域である。
- 小問 (v) で二つの粒子に同じ時間変数を使ってしまう。Q は $t - T$ の間しか運動していない。

STEP のその先へ

曲線 E は軌道の族の**包絡線**、すなわち族のすべての曲線に接する曲線である。一般に、族 $F(x, z, \alpha) = 0$ の包絡線は、$F = 0$ と $\partial F/\partial\alpha = 0$ から α を消去することで求められる。これはここで用いた重解条件の微分による表現である。小問 (ii) の回転放物面はしばしば**安全放物面**（paraboloid of safety）と呼ばれ、小問 (iii) は重力が消える自由落下系（freely falling frame）への座標変換の一例である。Kleppner と Kolenkow による *An Introduction to Mechanics*（力学入門）では、これら両方の考え方が展開されている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。