解答例

STEP II 2023、第 1 問

純粋数学 ・ 置換積分

> **STEP II 2023、問 1**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は、OCR が配布している 2023 年の STEP 過去問一式（zip ファイル）のうち、STEP II の問題用紙にある：
>
> www.ocr.org.uk/Images/707102-2023-past-papers.zip

鍵となる考え方

置換（substitution）$x = 1/t$ は $\frac{1}{2}$ と 2 を入れ替えるので、区間 $[\frac{1}{2}, 2]$ をそれ自身の上に（向きを逆にして）写す。したがって、この区間上の積分は、同じ区間上の**見かけの異なる**積分に書き換えることができる。区間は**同じ**である。新しい被積分関数（integrand）がそのまま簡単に積分できることもあれば、もとの被積分関数と対になるものになっていて、両者を足し合わせる（あるいは比較する）ことで答えが得られることもある。

解答

小問 (i)

$x = 1/t$ とおくと、$\mathrm{d}x = -\frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t$ である。$a > 0$ であるから、$[a, b]$ に属するすべての x は正であり、対応する t も正である。このとき

$$1 + x^2 = \frac{t^2 + 1}{t^2} \quad \Longrightarrow \quad (1 + x^2)^{3/2} = \frac{(1 + t^2)^{3/2}}{t^3},$$

となる。ここで $t > 0$ であるから $\sqrt{t^2} = t$ を用いた。積分範囲の端 $x = a$ と $x = b$ はそれぞれ $t = a^{-1}$ と $t = b^{-1}$ になる。よって

$$\int_a^b \frac{1}{(1 + x^2)^{3/2}}\,\mathrm{d}x = \int_{a^{-1}}^{b^{-1}} \frac{t^3}{(1 + t^2)^{3/2}} \cdot \left(-\frac{1}{t^2}\right)\mathrm{d}t = \int_{a^{-1}}^{b^{-1}} \frac{-t}{(1 + t^2)^{3/2}}\,\mathrm{d}t,$$

となり、示すべき式が得られた。

小問 (ii)

(a) $a = \frac{1}{2}$、$b = 2$ とすると、新しい積分範囲の端は 2 と $\frac{1}{2}$ になる。上端と下端を入れ替えることで負号が消える：

$$\int_{1/2}^{2} \frac{1}{(1+x^2)^{3/2}}\,\mathrm{d}x = \int_{1/2}^{2} \frac{t}{(1+t^2)^{3/2}}\,\mathrm{d}t.$$

新しい被積分関数は $1+t^2$ のべきの導関数（の定数倍）である。$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(1+t^2)^{-1/2} = -t(1+t^2)^{-3/2}$ であるから、

$$\int_{1/2}^{2} \frac{t}{(1+t^2)^{3/2}}\,\mathrm{d}t = \Big[-(1+t^2)^{-1/2}\Big]_{1/2}^{2} = -\frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{5/4}} = -\frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

(b) 被積分関数は偶関数（even function）であるから、$[-2,2]$ 上の積分は $[0,2]$ 上の積分の 2 倍である。これを $[0,\frac{1}{2}] \cup [\frac{1}{2},2]$ と分ける。後半の部分は (a) で求めたものである。

考えてみよう 小問 (i) には $a > 0$ が必要である。0 から始まる部分はどう扱えばよいだろうか？

小問 (i) が適用できる $0 < a < \frac{1}{2}$ に対して $[a,\frac{1}{2}]$ 上で計算し、そのあとで $a \to 0^+$ とする。$b = \frac{1}{2}$ として小問 (i) を用いると

$$\int_{a}^{1/2} \frac{1}{(1+x^2)^{3/2}}\,\mathrm{d}x = \int_{2}^{1/a} \frac{t}{(1+t^2)^{3/2}}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{1+a^{-2}}}.$$

$a \to 0^+$ のとき $a^{-2} \to \infty$ となり、最後の項は 0 に収束する。左辺は $[0,\frac{1}{2}]$ 上の積分に収束する。被積分関数がそこで連続だからである。したがってこの部分も $\frac{1}{\sqrt{5}}$ であり、

$$\int_{-2}^{2} \frac{1}{(1+x^2)^{3/2}}\,\mathrm{d}x = 2\Big(\frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{5}}\Big) = \frac{4}{\sqrt{5}}.$$

小問 (iii)

(a) $J = \int_{1/2}^{2} \frac{1}{(1+x^2)^2}\,\mathrm{d}x$ とおき、再び $x = 1/t$ と置換する。今度は $(1+x^2)^2 = (1+t^2)^2/t^4$ であるから、

$$J = \int_{2}^{1/2} \frac{t^4}{(1+t^2)^2} \cdot \Big(-\frac{1}{t^2}\Big)\mathrm{d}t = \int_{1/2}^{2} \frac{t^2}{(1+t^2)^2}\,\mathrm{d}t,$$

となり、積分変数（ダミー変数、dummy variable）t を x と書き直せば、これが最初の等式である。この 2 番目の積分を K とおくと、$J = K$ である。2 つの被積分関数を足し合わせると

$$J + K = \int_{1/2}^{2} \frac{1+x^2}{(1+x^2)^2}\,\mathrm{d}x = \int_{1/2}^{2} \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x,$$

となり、$J = K$ であるから $J = \frac{1}{2}\int_{1/2}^{2} \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$ が得られ、一連の等式が完成する。

よって

$$J = \tfrac{1}{2}(\arctan 2 - \arctan \tfrac{1}{2}).$$

これは次の 2 通りのどちらの方法でも整理できる。$\arctan 2 + \arctan \frac{1}{2} = \frac{\pi}{2}$ であること（直角をはさむ 2 辺が 1 と 2 の直角三角形における余角（complementary angles））から、$J = \frac{\pi}{4} - \arctan \frac{1}{2}$ となる。あるいは、tan の減法定理（subtraction formula）により $\tan(\arctan 2 - \arctan \frac{1}{2}) = \dfrac{2 - \frac{1}{2}}{1+1} = \frac{3}{4}$ であり、この差は $(0, \frac{\pi}{2})$ に属するので、

$$\int_{1/2}^{2} \frac{1}{(1+x^2)^2}\,\mathrm{d}x = \tfrac{1}{2}\arctan\tfrac{3}{4} \approx 0.3218.$$

(b) 求める積分を L とおく。難しい原始関数（antiderivative）を探しにかかる前に、もう一度 $x = 1/t$ を試してみる。被積分関数は

$$\frac{1 - \frac{1}{t}}{\frac{1}{t}\sqrt{\frac{1+t^2}{t^2}}} = \frac{\frac{t-1}{t}}{\frac{\sqrt{1+t^2}}{t^2}} = \frac{t(t-1)}{\sqrt{1+t^2}},$$

となる。ここでも $t > 0$ を用いた。$\mathrm{d}x = -\frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t$ を掛け、積分範囲が 2 から $\frac{1}{2}$ までであることに注意すると、

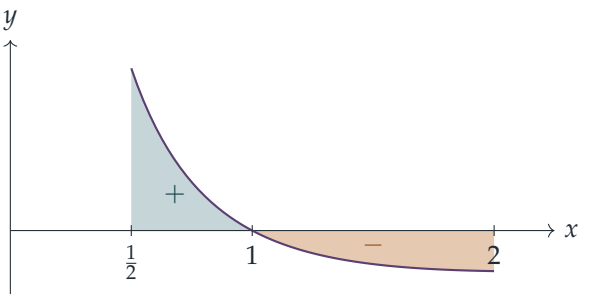
$$L = \int_{2}^{1/2} \frac{-(t-1)}{t\sqrt{1+t^2}}\,\mathrm{d}t = \int_{1/2}^{2} \frac{t-1}{t\sqrt{1+t^2}}\,\mathrm{d}t = -\int_{1/2}^{2} \frac{1-t}{t\sqrt{1+t^2}}\,\mathrm{d}t = -L.$$

考えてみよう 置換によって L が $-L$ になってしまった。これは矛盾だろうか？

そうではない。これは値を教えてくれているだけである。$L = -L$ から $2L = 0$ が得られるので、

$$\int_{1/2}^{2} \frac{1-x}{x(1+x^2)^{1/2}}\,\mathrm{d}x = 0.$$

図もこれと合っている。$[\frac{1}{2}, 1]$ 上の正の面積は $[1, 2]$ 上の負の面積とちょうど打ち消し合う。$x \mapsto 1/x$ はこの 2 つの部分を入れ替え、上の計算により、一方の面積を他方の面積の符号を変えたものに移すからである。



検算

- $(1+x^2)^{-3/2}$ の原始関数の 1 つは $x(1+x^2)^{-1/2}$ である（微分して確かめよ）。これを用いると (ii)(a) は $\frac{2}{\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}} \approx 0.4472$、(ii)(b) は $\frac{4}{\sqrt{5}} \approx 1.7889$ となり、上の答えと一致する。
- (iii)(a) では、$\frac{1}{2}\arctan\frac{3}{4} \approx 0.32175$ と $\frac{\pi}{4} - \arctan\frac{1}{2} \approx 0.32175$ が一致する。一連の等式に現れる 3 つの積分を数値積分（numerical quadrature）しても同じ値が得られる。
- (iii)(b) では、被積分関数は $x < 1$ で正、$x > 1$ で負であるから、答えが 0 になるのはもっともである。数値積分でも丸め誤差の範囲で 0 が得られる。

よくある間違い

- $\mathrm{d}x = -t^{-2}\,\mathrm{d}t$ の負号を落とすこと。あるいは、その負号が積分範囲の上端と下端を入れ替えることで打ち消されるのを忘れること。
- (ii)(b) で $a = 0$ として小問 (i) を適用すること。これには $t = 1/0$ という端が必要になってしまう。極限（limit）を用いるか、単に原始関数を用いればよい。
- $t > 0$ が必要であることに触れずに $\sqrt{(1+t^2)/t^2} = \sqrt{1+t^2}/t$ と書くこと。

STEP のその先へ

写像 $x \mapsto 1/x$ は区間 $[\frac{1}{2}, 2]$ の対称性（symmetry）であり、積分の対称性を利用するのは繰り返し現れる技法である。たとえば $\int_0^{\pi/2} \ln\sin x\,\mathrm{d}x$ を $x \mapsto \frac{\pi}{2} - x$ によって求める場合がそうである。小問 (ii)(b) は広義積分（improper integral）への最初の入り口である。置換によって有限の端点が無限大に送られ、慎重に極限をとる必要があった。Abbott の *Understanding Analysis*（解析学入門）は積分の極限を厳密に扱っており、Siklos の *Advanced Problems in Mathematics*（STEP 対策問題集）には STEP 形式の積分の演習問題がさらに収められている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。