解答例

STEP III 2022、第 9 問

力学 ・ 衝突と反発係数

> **STEP III 2022、問 9**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は、OCR が配布している 2022 年の STEP 過去問一式（zip ファイル）のうち、STEP III の問題用紙にある：
>
> www.ocr.org.uk/Images/696587-2022-past-papers.zip

鍵となる考え方

ここで起こる衝突（collision）はすべて同じ型の衝突である。すなわち、運動している粒子が、質量が k 倍の静止した粒子に衝突する。したがって、小問 (i) の最初に求めた係数 α と β は、B（質量 km）が C（質量 k^2m）に衝突する小問 (ii) でもそのまま使える。そのあと、「同じ点で出会う」という条件は、どれも同じ時刻を表す二つの式を等しいとおくだけのことである。小問 (ii) では k と e についての方程式が二つ得られ、そのうちの一つはちょうど小問 (i) の条件そのものになる。

解答

A、B、C を、なめらかな面上の一直線に沿って運動する質点とみなし、衝突は瞬間的に起こるものとする。速度はすべて A の初めの運動の向きを正として測る。

小問 (i)

1 回目の衝突。運動量（momentum）は保存され、ニュートン（Newton）の反発の法則（law of restitution）により、遠ざかる速さは近づく速さの e 倍である：

$$mu = mv_1 + kmv_2, \qquad v_2 - v_1 = eu.$$

$v_1 = v_2 - eu$ を第 1 式に代入すると $u = v_2 - eu + kv_2$ となるので、

$$v_2 = \frac{1+e}{k+1}\,u = \beta u, \qquad v_1 = \frac{1+e}{k+1}\,u - eu = \frac{1+e-ek-e}{k+1}\,u = \frac{1-ke}{k+1}\,u = \alpha u,$$

となり、示すべき式が得られる。

2 回目の衝突。時刻は 1 回目の衝突から測る。B は壁までの距離 D を時間 $D/(\beta u)$ で進む。B は速さ $e\beta u$ ではね返るので、衝突点に向かって $\frac{1}{2}D$ 戻るのにさらに時間 $D/(2e\beta u)$ かかる。2 回目の衝突がそこで起こるならば、その時刻は

$$T = \frac{D}{\beta u}\left(1+\frac{1}{2e}\right) = \frac{(2e+1)D}{2e\beta u}.$$

である。この点は壁から $\frac{1}{2}D$ の位置にあるので、1 回目の衝突点から $\frac{1}{2}D$ だけ**先**の位置でもある。A は一定の速度 αu で運動するので、$\alpha > 0$ かつ $\alpha u T = \frac{1}{2}D$ でなければならない：

$$\alpha\,\frac{(2e+1)D}{2e\beta} = \frac{D}{2} \quad\Longleftrightarrow\quad \alpha(2e+1) = e\beta.$$

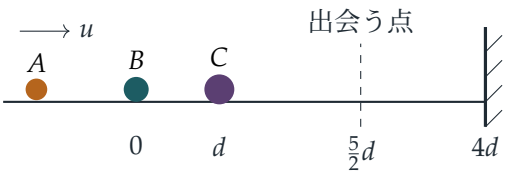
両辺に $k+1$ を掛けると $(1-ke)(2e+1) = e(1+e)$ となるので、

$$ke(2e+1) = (2e+1) - e - e^2 = 1 + e - e^2 \quad\Longrightarrow\quad k = \frac{1+e-e^2}{e(2e+1)},$$

となり、これが求める結果である。この値で実際に $\alpha > 0$ となる。実際、このとき $ke = \frac{1+e-e^2}{2e+1}$ であり、$e > 0$ のとき $1+e-e^2 < 1+2e$ であるから、これは 1 より小さい。

小問 (ii)

原点を B の初めの位置にとる。すると C は $x = d$ から出発し、壁は $x = 4d$ にある。求める出会う点は壁から $\frac{3}{2}d$ の位置、すなわち $x = \frac{5}{2}d$ である。



A が B に衝突する瞬間を $t = 0$ とする。この衝突は小問 (i) の衝突とまったく同じなので、衝突後 A は速度 αu、B は速度 βu で運動する。ここで α と β は前と同じである。

> **考えてみよう** B が C に衝突すると何が起こるか。衝突の計算をやり直す必要があるだろうか。

その必要はない。C は静止しており、その質量 k^2m は B の質量 km の k 倍である。したがってこれは、質量比 k、同じ e で、衝突前の速さが u の代わりに βu となった小問 (i) の衝突そのものである。B は時刻 $t_1 = d/(\beta u)$ に C に衝突する。衝突後、B は $\alpha\beta u$、C は $\beta^2 u$ で運動する。

ここで、それより前に他の衝突が起こらないと仮定して（これは最後に確かめる）、各粒子が $x = \frac{5}{2}d$ に到達する時刻を求める。

- A は $x=0$ から αu で運動するので、時刻 $t=\dfrac{5d}{2\alpha u}$ に到達する。
- B は時刻 t_1 に $x=d$ に達し、そのあと速さ $\alpha\beta u$ で $\frac{3}{2}d$ 進む。到達時刻は $t=\dfrac{d}{\beta u}+\dfrac{3d}{2\alpha\beta u}$ である。
- C は壁までの $3d$ を $\beta^2 u$ で進み、そのあと $\frac{3}{2}d$ を $e\beta^2 u$ で戻る。到達時刻は

$$t=\frac{d}{\beta u}+\frac{3d}{\beta^2 u}\left(1+\frac{1}{2e}\right)=\frac{d}{\beta u}+\frac{3(2e+1)d}{2e\beta^2 u}.$$

である。

三つの粒子が同時に衝突するためには、三つの時刻がすべて等しくなければならない。

B と C。 共通の項 $d/(\beta u)$ を消去し、$2\beta^2 u/(3d)$ を掛けると

$$\frac{1}{\alpha}\beta=\frac{2e+1}{e}\quad\Longleftrightarrow\quad e\beta=\alpha(2e+1).$$

これはちょうど小問 (i) の条件であるから、

$$k=\frac{1+e-e^2}{e(2e+1)}. \tag{1}$$

（これは偶然ではない。どちらの状況でも、一方の粒子は衝突のあと、衝突前の速さの β 倍で壁まで D 進み、$\frac{1}{2}D$ 戻ってくる。その間に他方の粒子は、衝突前の速さの α 倍で $\frac{1}{2}D$ 前進する。ここでは $D=3d$ であり、衝突前の速さは βu である。）

A と B。 $\dfrac{5}{2\alpha}=\dfrac{1}{\beta}+\dfrac{3}{2\alpha\beta}$ に $2\alpha\beta$ を掛けると $5\beta=2\alpha+3$ を得る。さらに $k+1$ を掛けると

$$5(1+e)=2(1-ke)+3(k+1)\quad\Longrightarrow\quad 5e=k(3-2e)\quad\Longrightarrow\quad k=\frac{5e}{3-2e}. \tag{2}$$

考えてみよう k を表す式が二つ得られた。e はどうすれば求められるか。

(1) と (2) を等しいとおく。$0<e<1$ よりどちらの分母も正なので、たすき掛けしてよい：

$$\begin{aligned}5e^2(2e+1)&=(3-2e)(1+e-e^2)\\10e^3+5e^2&=3+e-5e^2+2e^3\\0&=8e^3+10e^2-e-3.\end{aligned}$$

$e=\frac{1}{2}$ を代入してみると $1+\frac{5}{2}-\frac{1}{2}-3=0$ となるので、$2e-1$ は因数である：

$$8e^3+10e^2-e-3=(2e-1)(4e^2+7e+3)=(2e-1)(4e+3)(e+1).$$

他の根 $-\frac{3}{4}$ と -1 は負であるから、$0 < e < 1$ を満たす根は $e = \frac{1}{2}$ のみであり、示すべきことが示された。このとき $k = \frac{5}{4}$ である。

状況に矛盾がないことの確認。$e = \frac{1}{2}$、$k = \frac{5}{4}$ のとき $\alpha = \frac{1}{6}$、$\beta = \frac{2}{3}$ である。B が C に衝突する前は、A（速さ $\frac{1}{6}u$）は B（速さ $\frac{2}{3}u$）より遅いので、途中で B に追いつくことはない。その後は、B（速さ $\frac{1}{9}u$）は C（速さ $\frac{4}{9}u$）より遅いので、C が壁に達する前に B が C に追いつくことはない。このとき B は A より遅くなっているので、A は B に近づき、両者は計算した点でのみ出会う。したがって余分な衝突は起こらず、三つの粒子はすべて時刻 $t = 15d/u$ に $x = \frac{5}{2}d$ に到達する。

検算

- 小問 (i) で $v_1 + kv_2 = u$（運動量）と $v_2 - v_1 = eu$（反発）が成り立つ。$e = 1$、$k = 1$ ならば $\alpha = 0$、$\beta = 1$ となる。完全弾性衝突（perfectly elastic collision）では等しい質量の物体どうしが速度を交換するはずであり、そのとおりになっている。
- 小問 (ii) で $u = d = 1$ とし上の値を用いると、三つの到達時刻は、A が $\frac{5/2}{1/6} = 15$、B が $\frac{1}{2/3} + \frac{3/2}{1/9} = \frac{3}{2} + \frac{27}{2} = 15$、$C$ が $\frac{3}{2} + \frac{3}{4/9} + \frac{3/2}{2/9} = \frac{3}{2} + \frac{27}{4} + \frac{27}{4} = 15$ である。
- 式 (1) に $e = \frac{1}{2}$ を代入すると $k = \frac{5/4}{1} = \frac{5}{4}$ となり、(2) の $\frac{5/2}{2} = \frac{5}{4}$ と一致する。

よくある間違い

- 小問 (i) で、出会う点を衝突点から測るべきところを壁から測ってしまう。ここではたまたまどちらも $\frac{1}{2}D$ で同じになるが、小問 (ii) では壁から $\frac{3}{2}d$ の出会う点は B の初めの位置から $\frac{5}{2}d$ の位置である。
- B–C の衝突を一から計算し直して、係数を落としてしまう。質量比が再び k であることに気づけば、その手間は省ける。
- C が壁から $\beta^2 u$ ではなく $e\beta^2 u$ で戻ってくることを忘れる。

STEP のその先へ

この問題がうまくいくのは、問題が**自己相似**（self-similar）だからである。質量を k 倍、速さを β 倍に拡大すると一つの衝突が次の衝突に移るので、同じ計算が繰り返される。同じ考え方は、質量が等比数列的に減少する球を並べてエネルギーを非常に効率よく伝える仕組みや、有名な「ブロックの衝突で π を数える」問題の背後にもある。後者では、運動量とエネルギーを制約条件として速度空間（velocity space）で考えると、解析が最もすっきりする。Kleppner と Kolenkow の *An Introduction to Mechanics*

（力学入門）は、重心系（centre-of-mass frame）で考える方法も含めて衝突を体系的に扱っており、重心系で考えると α や β のような式が見通しよく理解できる。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。