解答例

STEP III 2022、第 8 問

純粋数学 ・ ド・モアブルの定理と無理性

> **STEP III 2022、問 8**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は、OCR が配布している 2022 年の STEP 過去問一式（zip ファイル）のうち、STEP III の問題用紙にある：
>
> www.ocr.org.uk/Images/696587-2022-past-papers.zip

この問題は、*Beyond STEP* の第 5.5 節「**有理角になりそうでならない角**」で詳しく解説されている：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/ch05/rational-angles.html

鍵となる考え方

ド・モアブルの定理（De Moivre's theorem）を用いて $\cos\theta$ をくくり出すと、$\sin k\theta$ と $\cos k\theta$ は、$\cos^k\theta$（または $\sin\theta\cos^{k-1}\theta$）と $\tan^2\theta = \sec^2\theta - 1$ の多項式（polynomial）との積として表される。$\sec^2\theta - 1$ が**偶数**（even integer）であるとき、その多項式の値は整数であり、その偶奇（parity）は第 1 項から読み取ることができる。度数法で有理数の角があれば、ある $\sin k\theta$ が 0 になるはずであるが、偶奇の議論によりそれは決して起こりえないことがわかる。

解答

小問 (i)

$\cos\theta \neq 0$ と仮定し、$\sec\theta$ が存在するようにする。ド・モアブルの定理より、

$$\cos k\theta + \mathrm{i}\sin k\theta = (\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)^k = \cos^k\theta\,(1+\mathrm{i}t)^k, \qquad t = \tan\theta.$$

二項展開（binomial expansion）すると、$(1+\mathrm{i}t)^k = \sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}\mathrm{i}^j t^j$ である。j が奇数の項は純虚数で $\mathrm{i}^{2r+1} = (-1)^r\mathrm{i}$ であり、j が偶数の項は実数で $\mathrm{i}^{2r} = (-1)^r$ である。虚部

（imaginary part）をとると、

$$\begin{aligned}\sin k\theta &= \cos^k\theta\left(\binom{k}{1}t - \binom{k}{3}t^3 + \binom{k}{5}t^5 - \cdots\right)\\ &= \cos^k\theta\,\tan\theta\left(k - \binom{k}{3}t^2 + \binom{k}{5}t^4 - \cdots\right).\end{aligned}$$

$\cos^k\theta\tan\theta = \sin\theta\cos^{k-1}\theta$ かつ $t^2 = \tan^2\theta = \sec^2\theta - 1$ であるから、これは

$$\sin k\theta = \sin\theta\cos^{k-1}\theta\left(k - \binom{k}{3}(\sec^2\theta - 1) + \binom{k}{5}(\sec^2\theta - 1)^2 - \cdots\right)$$

となり、示すべき式が得られた。$j > k$ のとき $\binom{k}{j} = 0$ であるから、括弧内の和はおのずと有限で終わる。同様に実部をとると、

$$\cos k\theta = \cos^k\theta\left(1 - \binom{k}{2}(\sec^2\theta - 1) + \binom{k}{4}(\sec^2\theta - 1)^2 - \cdots\right).$$

小問 (ii)

ここでは $a \geq 3$ として $\cos\theta = 1/a$ であるから、$0° < \theta < 90°$ である。特に $\sin\theta \neq 0$ かつ $\cos\theta \neq 0$ である。また $\sec^2\theta - 1 = a^2 - 1$ であり、a は奇数なので、これは**偶数**である。$X = a^2 - 1$ とおく。

$\sin k\theta = 0$ を満たす最小の正の整数を k とする。$\sin\theta \neq 0$ より $k \neq 1$ なので $k > 1$ であり、小問 (i) が使える：

$$0 = \sin k\theta = \sin\theta\cos^{k-1}\theta\left(k - \binom{k}{3}X + \binom{k}{5}X^2 - \cdots\right).$$

因数 $\sin\theta\cos^{k-1}\theta$ は 0 でないから、括弧内は 0 である。第 2 項以降の各項は偶数 X を少なくとも 1 つ因数にもち、二項係数（binomial coefficient）は整数であるから、

$$0 = k - \binom{k}{3}X + \binom{k}{5}X^2 - \cdots \equiv k \pmod 2.$$

よって k は偶数である。ここで

$$0 = \sin k\theta = 2\sin\left(\tfrac{1}{2}k\theta\right)\cos\left(\tfrac{1}{2}k\theta\right).$$

ところが $\frac{1}{2}k$ は $0 < \frac{1}{2}k < k$ を満たす整数であるから、k の最小性より $\sin(\frac{1}{2}k\theta) \neq 0$ である。したがって、示すべきとおり $\cos(\frac{1}{2}k\theta) = 0$ である。

考えてみよう θ が有理数であるという仮定は、どこで使われるのか？

それこそが、そもそも k を生み出すものである。p, q を正の整数として $\theta = p/q$ とする（θ は度数法で測っていることを思い出そう）。すると $180q\theta = 180p$ なので、

$\sin(180q\,\theta) = 0$ である。したがって $\sin m\theta = 0$ を満たす正の整数 m が**存在し**、ゆえにそのような最小のものも存在する。それを k とする。これは上の仮定を満たすので、k は偶数であり、$n = \frac{1}{2}k$ とおくと $\cos n\theta = 0$ となる。

ここで、$\cos n\theta$ が o になりえないことを示す。$n = 1$ ならば $\cos n\theta = 1/a \neq 0$ である。$n > 1$ ならば、小問 (i) の余弦の公式より

$$\cos n\theta = \frac{1}{a^n}\left(1 - \binom{n}{2}X + \binom{n}{4}X^2 - \cdots\right).$$

やはり第 2 項以降はすべて偶数なので、括弧内は奇数であり、特に o でない。よって $\cos n\theta \neq 0$ となり、矛盾する。ゆえに θ は無理数（irrational）である。

小問 (iii)

今度は $\cot\phi = 1/b$ なので $\tan\phi = b$（ただし $b \geq 2$）であり、$0° < \phi < 90°$ である。やはり $\sin\phi \neq 0$ かつ $\cos\phi \neq 0$ であり、今回は

$$\sec^2\phi - 1 = \tan^2\phi = b^2$$

となる。b は偶数なので、これは**偶数**である。したがって、$a^2 - 1$ の代わりに $X = b^2$ として、小問 (ii) とまったく同じ議論が成り立つ。詳しく書くと次のとおりである。

p, q を正の整数として $\phi = p/q$ とする。すると $\sin(180q\,\phi) = 0$ なので、$\sin k\phi = 0$ を満たす最小の正の整数 k が存在し、$\sin\phi \neq 0$ より $k > 1$ である。$\sin\phi\cos^{k-1}\phi \neq 0$ であるから、小問 (i) より

$$0 = k - \binom{k}{3}b^2 + \binom{k}{5}b^4 - \cdots \equiv k \pmod 2,$$

よって k は偶数である。このとき $0 = \sin k\phi = 2\sin(\frac{1}{2}k\phi)\cos(\frac{1}{2}k\phi)$ であり、最小性より $\sin(\frac{1}{2}k\phi) \neq 0$ なので、$n = \frac{1}{2}k$ として $\cos n\phi = 0$ となる。$n = 1$ ならば、これは $\cos\phi = 0$ を意味するが、これは誤りである。$n > 1$ ならば

$$\cos n\phi = \cos^n\phi\left(1 - \binom{n}{2}b^2 + \binom{n}{4}b^4 - \cdots\right)$$

であり、$\cos^n\phi \neq 0$ かつ括弧内は奇数なので o でない。この矛盾により、ϕ は無理数であることが示された。

検算

- 小問 (i) で $k = 2$ と $k = 3$ を試すと、公式から $\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$、$\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta$、$\sin 3\theta = \sin\theta(3\cos^2\theta - \sin^2\theta) = 3\sin\theta - 4\sin^3\theta$ が得られる。また、15 までの k について、どちらの公式もランダムな角での直接計算と一致する。

- 偶奇の条件は本質的である。$a = 2$（偶数）とすると $\theta = 60°$、$b = 1$（奇数）とすると $\phi = 45°$ となり、どちらも有理数である。それぞれの場合 $X = 3$ または 1 は奇数であり、議論はまさに破綻すべきところで破綻している。
- $a = 3$ のとき $\theta \approx 70.5288°$、$b = 2$ のとき $\phi \approx 63.4349°$ である。コンピュータによる検証で、30 未満のすべての奇数 a と偶数 b について、すべての $k < 2000$ に対し $\sin k\theta$ と $\sin k\phi$ が 0 から十分離れていることが確認できる。

よくある間違い

- $\sin\theta\cos^{k-1}\theta \neq 0$ で割る前に、それが成り立つ理由を述べ忘れる。
- k がどこから来るのかを説明しない。最小の k が存在するのは、θ が有理数ならば $\sin(180q\,\theta) = 0$ となるからにほかならない。
- k の最小性を用いて $\sin(\frac{1}{2}k\theta) = 0$ を除外することなく、$\cos(\frac{1}{2}k\theta) = 0$ と結論してしまう。

STEP のその先へ

ここに現れた括弧内の式は、前に掛かる因数を除けば**チェビシェフ多項式**（Chebyshev polynomials）であり、偶奇を使う技法は、整数の恒等式を素数を法として還元する（reducing modulo a prime）という考え方の最初の一端である。よく知られた関連する結果に**ニーベンの定理**（Niven's theorem）がある：180° の有理数倍 θ のうち $\cos\theta$ が有理数となるのは、$\cos\theta \in \{0, \pm\frac{1}{2}, \pm 1\}$ となるものに限る。これは $2\cos\theta$ が代数的整数（algebraic integer）であることを示して証明される。このような議論の背後にある整数論を身につけるには、ダベンポート（Davenport）の *The Higher Arithmetic*（整数論の入門書）がよい出発点である。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。