解答例

STEP III 2022、第 7 問

純粋数学 • 外積による変換

STEP III 2022、問 7

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は、OCR が配布している 2022 年の STEP 過去問一式（zip ファイル）のうち、STEP III の問題用紙にある：

www.ocr.org.uk/Images/696587-2022-past-papers.zip

この問題は、*Beyond STEP* の第 7.5 節「三次元の回転」で詳しく解説されている：
https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/ch07/rotations-3d.html

鍵となる考え方

すべての土台は、ベクトルを $\mathbf{n}$ に沿った部分と $\mathbf{n}$ に垂直な部分とに分解することにある。写像（map）$\mathbf{r} \mapsto \mathbf{n} \times \mathbf{r}$ は平行な部分を消し、垂直な部分を長さを変えずに $\mathbf{n}$ のまわりに直角だけ回転させる。小問 (i) により、これを 2 回施すと垂直な部分の符号を反転させたものが得られることがわかれば、(ii) と (iii) の写像は、それぞれが 2 つの部分に別々にどう作用するかを見ることで読み取れる。

解答

小問 (i)

$\mathbf{n} = (a, b, c)^{\mathsf{T}}$、$\mathbf{r} = (x, y, z)^{\mathsf{T}}$ とすると、

$$\mathrm{f}(\mathbf{r}) = \mathbf{n} \times \mathbf{r} = \begin{pmatrix} bz - cy \\ cx - az \\ ay - bx \end{pmatrix}.$$

もう一度 f を施すと、$\mathbf{n} \times \mathrm{f}(\mathbf{r})$ の x 成分（component）は、$\mathrm{f}(\mathbf{r})$ の第 3 成分の b 倍から第 2 成分の c 倍を引いたものであるから、

$$\begin{aligned} b(ay - bx) - c(cx - az) &= aby - b^2x - c^2x + acz \\ &= -x(b^2 + c^2) + aby + acz, \end{aligned}$$

となり、求める式が得られる。$\mathbf{n}$ は単位ベクトル(unit vector)であるから $b^2+c^2=1-a^2$ であり、これは

$$-x+a^2x+aby+acz=a(ax+by+cz)-x=(\mathbf{n}\cdot\mathbf{r})\,a-x.$$

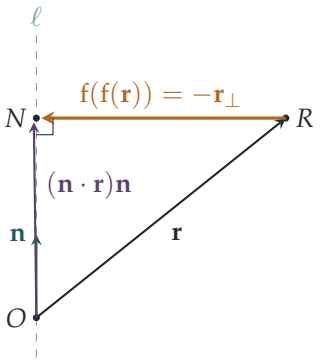
となる。これは $(\mathbf{n}\cdot\mathbf{r})\mathbf{n}-\mathbf{r}$ の x 成分である。y 成分と z 成分も、$a\to b\to c\to a$、$x\to y\to z\to x$ と巡回的に置き換えることで同様に得られる。外積(cross product)はこの巡回的な文字の付け替えで不変だからである。よって

$$\mathrm{f}(\mathrm{f}(\mathbf{r}))=(\mathbf{n}\cdot\mathbf{r})\mathbf{n}-\mathbf{r}.$$

幾何学的な意味。 $\mathbf{r}=\mathbf{r}_{\parallel}+\mathbf{r}_{\perp}$ と書く。ここで $\mathbf{r}_{\parallel}=(\mathbf{n}\cdot\mathbf{r})\mathbf{n}$ は $\mathbf{n}$ に沿った成分、$\mathbf{r}_{\perp}=\mathbf{r}-(\mathbf{n}\cdot\mathbf{r})\mathbf{n}$ は $\mathbf{n}$ に垂直な成分である。すると

$$\mathrm{f}(\mathrm{f}(\mathbf{r}))=-\mathbf{r}_{\perp}.$$

ℓ を O を通り $\mathbf{n}$ の向きをもつ直線とし、N を R から ℓ に下ろした垂線の足(foot of the perpendicular)とすると、$\overrightarrow{ON}=\mathbf{r}_{\parallel}$ である。このとき $\mathrm{f}(\mathrm{f}(\mathbf{r}))=\overrightarrow{ON}-\overrightarrow{OR}=\overrightarrow{RN}$ であり、これは R から軸 ℓ へ、ℓ と直角にまっすぐ向かうベクトルである。その長さは R と ℓ の距離に等しい。



小問 (ii)

軸について。 $\mathbf{n}\times\mathbf{n}=\mathbf{0}$ であるから $\mathrm{f}(\mathbf{n})=\mathbf{0}$、したがって $\mathrm{f}(\mathrm{f}(\mathbf{n}))=\mathbf{0}$ であり、$\mathrm{g}(\mathbf{n})=\mathbf{n}$ を得る。線形性(linearity)により $\mathrm{g}(\lambda\mathbf{n})=\lambda\mathbf{n}$ であるから、直線 ℓ 上のすべての点は動かない。

垂直なベクトルについて。 次に $\mathbf{n}\cdot\mathbf{r}=0$ を満たす $\mathbf{r}$ をとる。小問 (i) より $\mathrm{f}(\mathrm{f}(\mathbf{r}))=-\mathbf{r}$ であるから、

$$\mathrm{g}(\mathbf{r})=\mathbf{r}+\sin\theta\,(\mathbf{n}\times\mathbf{r})-(1-\cos\theta)\mathbf{r}=\cos\theta\,\mathbf{r}+\sin\theta\,(\mathbf{n}\times\mathbf{r}).$$

考えてみよう $\mathbf{r} \perp \mathbf{n}$ のとき、$\mathbf{n} \times \mathbf{r}$ はどのようなベクトルか。

これは $\mathbf{n}$ と $\mathbf{r}$ の両方に垂直であるから、O を通り $\mathbf{n}$ に垂直な平面内にあり、$\mathbf{r}$ と直角をなす。その長さは $|\mathbf{n}||\mathbf{r}|\sin 90^\circ = |\mathbf{r}|$ である。したがって $\mathbf{r}$ と $\mathbf{n} \times \mathbf{r}$ はその平面内にある長さの等しい 2 つの直交するベクトルであり、$\mathbf{n} \times \mathbf{r}$ は $\mathbf{r}$ を $\mathbf{n}$ のまわりに右手系（right-handed）の向きに 90° 回転させたもの（$\mathbf{n}$ の先端から O の方を見たとき反時計回り）である。$\cos\theta\,\mathbf{i} + \sin\theta\,\mathbf{j}$ が $\mathbf{i}$ を $\mathbf{j}$ の方へ θ だけ回転させたものであるのとまったく同様に、ベクトル $\cos\theta\,\mathbf{r} + \sin\theta\,(\mathbf{n} \times \mathbf{r})$ は $\mathbf{r}$ を $\mathbf{n}$ のまわりに同じ向きに θ だけ回転させたものである。

一般のベクトルについて。 f は線形である（外積は第 2 引数について線形である）から、g も線形である。一般の $\mathbf{r}$ を $\mathbf{r}_\parallel + \mathbf{r}_\perp$ と書くと、g は $\mathbf{r}_\parallel$ をそのまま残し、$\mathbf{r}_\perp$ を $\mathbf{n}$ のまわりに θ だけ回転させる。これはまさに ℓ を軸とする回転（rotation）の作用である。

したがって $R \mapsto P$ は **O を通り $\mathbf{n}$ の向きをもつ直線のまわりの角 θ の回転**であり、その向きは $\mathbf{n}$ に関して右手系の向き（$\mathbf{n}$ の先端から O の方を見たとき反時計回り）である。

小問 (iii)

小問 (i) を用いると、

$$\mathrm{h}(\mathbf{r}) = -\mathbf{r} - 2\big((\mathbf{n}\cdot\mathbf{r})\mathbf{n} - \mathbf{r}\big) = \mathbf{r} - 2(\mathbf{n}\cdot\mathbf{r})\mathbf{n}.$$

2 つの成分で表すと、$\mathrm{h}(\mathbf{r}) = \mathbf{r}_\perp - \mathbf{r}_\parallel$ である。

- $\mathrm{h}(\mathbf{n}) = \mathbf{n} - 2\mathbf{n} = -\mathbf{n}$ であるから、$\mathbf{n}$ に沿った成分は向きが反転する。
- $\mathbf{n}\cdot\mathbf{r} = 0$ ならば $\mathrm{h}(\mathbf{r}) = \mathbf{r}$ であるから、平面 $\mathbf{n}\cdot\mathbf{r} = 0$ 上のすべての点は動かない。

幾何学的には、$\overrightarrow{RQ} = -2(\mathbf{n}\cdot\mathbf{r})\mathbf{n}$ は平面 $\Pi:\ \mathbf{n}\cdot\mathbf{r} = 0$ に垂直であり、RQ の中点の位置ベクトルは $\mathbf{r} - (\mathbf{n}\cdot\mathbf{r})\mathbf{n}$ で、これは Π 上にある。よって Q は R の鏡像であり、写像 $R \mapsto Q$ は **O を通り $\mathbf{n}$ に垂直な平面に関する鏡映**（reflection）である。

検算

- $\mathbf{n} = \mathbf{k} = (0,0,1)^\mathsf{T}$ とする。このとき $\mathbf{n} \times \mathbf{r} = (-y, x, 0)^\mathsf{T}$ であり、2 回施すと $(-x,-y,0)^\mathsf{T}$ となって、$(\mathbf{n}\cdot\mathbf{r})\mathbf{n} - \mathbf{r} = (0,0,z)^\mathsf{T} - (x,y,z)^\mathsf{T}$ と一致する。さらに $\mathrm{g}(\mathbf{r}) = (x\cos\theta - y\sin\theta,\ x\sin\theta + y\cos\theta,\ z)^\mathsf{T}$ はおなじみの z 軸のまわりの回転であり、$\mathrm{h}(\mathbf{r}) = (x,y,-z)^\mathsf{T}$ は平面 $z = 0$ に関する鏡映である。
- $\theta = 0$ のとき $\mathrm{g}(\mathbf{r}) = \mathbf{r}$ となり、h を 2 回施すと恒等写像（identity）になる。角 0 の

回転と鏡映ならば当然そうなるはずである。

- 2000 組のランダムな単位ベクトル $\mathbf{n}$、ベクトル $\mathbf{r}$、角 θ を用いたコンピュータによる検算で、x 成分の公式、$\mathrm{f}(\mathrm{f}(\mathbf{r}))$ の恒等式、g が $\mathbf{n}$ のまわりの右手系の向きの角 θ の回転に一致すること、h が平面 $\mathbf{n}\cdot\mathbf{r}=0$ に関する鏡映に一致することが確かめられた。

よくある間違い

- $a^2+b^2+c^2=1$ を使い忘れること。$\mathbf{n}$ が単位ベクトルでなければ、(i) の恒等式は成り立たない。
- (ii) で $\mathbf{r}\perp\mathbf{n}$ の場合だけを確かめ、それが $\mathrm{g}(\mathbf{n})=\mathbf{n}$ および線形性と合わせて、なぜすべての $\mathbf{r}$ について決着をつけるのかを説明しないこと。
- (iii) を**直線** ℓ に関する鏡映と言ってしまうこと。ℓ 上の点は動かないのではなく向きが反転する。動かないのは $\mathbf{n}$ に垂直な平面である。

STEP のその先へ

(ii) の公式はロドリゲスの回転公式（Rodrigues' rotation formula）であり、f の行列は反対称（antisymmetric）な「外積行列」（cross-product matrix）K である。したがって回転は $I+\sin\theta\,K+(1-\cos\theta)K^2$ と表され、これは $\exp(\theta K)$ にも等しい。(iii) の写像はハウスホルダー鏡映（Householder reflection）$I-2\mathbf{n}\mathbf{n}^{\mathsf{T}}$ であり、数値線形代数（numerical linear algebra）の主力となる道具である。大学 1 年次の講義では、これらはそれぞれ行列式（determinant）が $+1$ と -1 の直交行列（orthogonal matrix）として登場する。ストラング（Strang）の *Introduction to Linear Algebra*（線形代数入門）は、これらを学ぶのに適した本である。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。