解答例

# STEP III 2022、第 6 問

純粋数学 ・ 転がる円と接線

> **STEP III 2022、問 6**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は、OCR が配布している 2022 年の STEP 過去問一式（zip ファイル）のうち、STEP III の問題用紙にある：
>
> www.ocr.org.uk/Images/696587-2022-past-papers.zip

## 鍵となる考え方

小問 (i) は 2 次のテイラー展開（Taylor expansion）であり、その真の要点は最後の行にある注意である。すなわち、1 次の項が消えるときには、比は 2 次の項によって決まる。小問 (ii) では、転がりの条件から、接点を通過する二つの円の弧の長さが等しいことがわかり、これにより $C_1$ がどれだけ回転したかがわかる。(c) の特別な点では、弦（chord）における 1 次の項がちょうど打ち消し合うので、(i) の 2 次の項が必要になる。

## 解答

### 小問 (i)

$\alpha$ が小さいとき、$\cos\alpha \approx 1 - \frac{1}{2}\alpha^2$ および $\sin\alpha \approx \alpha$ であり、誤差は $\alpha^3$ のオーダーである。よって

$$\begin{aligned}\cos(\theta+\alpha) - \cos\theta &= \cos\theta\cos\alpha - \sin\theta\sin\alpha - \cos\theta \\ &\approx \cos\theta(1 - \tfrac{1}{2}\alpha^2) - \alpha\sin\theta - \cos\theta = -\alpha\sin\theta - \tfrac{1}{2}\alpha^2\cos\theta,\end{aligned}$$

となり、題意が示された。同様にして

$$\sin(\theta+\alpha) - \sin\theta \approx \alpha\cos\theta - \tfrac{1}{2}\alpha^2\sin\theta.$$

$(*)$ の分子と分母を $\alpha$ で割ると

$$\frac{\sin(\theta+\alpha)-\sin\theta}{\cos(\theta+\alpha)-\cos\theta} \approx \frac{\cos\theta - \frac{1}{2}\alpha\sin\theta}{-\sin\theta - \frac{1}{2}\alpha\cos\theta} \longrightarrow -\frac{\cos\theta}{\sin\theta} = -\cot\theta,$$

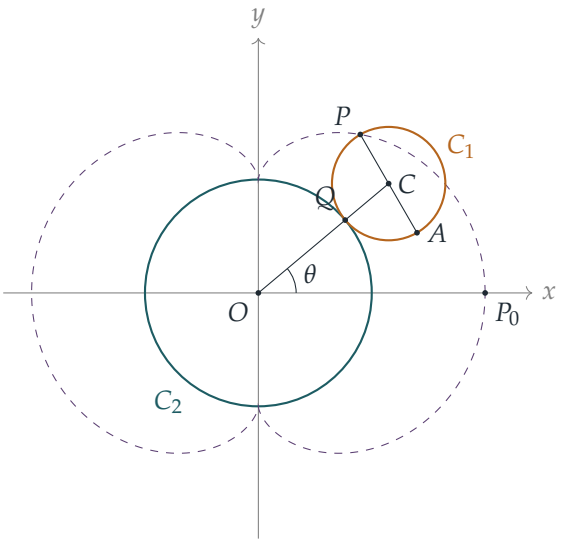
となる。分母は $-\sin\theta \neq 0$ に近づくので、この極限は問題なく存在する。

$\sin\theta = 0$ ならば $\cos\theta = \pm 1$ であり、分母の 1 次の項が消える：

$$(*) \approx \frac{\alpha\cos\theta}{-\frac{1}{2}\alpha^2\cos\theta} = -\frac{2}{\alpha}.$$

よって $(*)$ は有限の極限をもたない。その大きさは限りなく大きくなり、$\alpha \to 0^+$ のとき $-\infty$ に、$\alpha \to 0^-$ のとき $+\infty$ に発散する。（幾何学的には、単位円の角 $\theta$ から $\theta+\alpha$ への弦が垂直になり、その傾き（gradient）が発散するのである。）

**小問 (ii)(a)**




図は $n = 3$ の場合であり、破線の曲線が $P$ の軌跡である。$C$ を $C_1$ の中心とする。二つの円は $Q$ で接しているので、点 $O$、$Q$、$C$ は一直線上にあり、$OC = (n-1)a + a = na$ である。よって

$$\overrightarrow{OC} = na(\cos\theta, \sin\theta),$$

であり、$C$ から見て点 $Q$ は $\theta + \pi$ の方向にある。

$A$ を、$C_1$ 上で $P$ と直径の反対側にある点とする。これは最初に $C_2$ と接していた $C_1$ 上の点であり、そのとき $((n-1)a, 0)$ にあった。滑らずに転がる（rolling without slipping）ということは、$C_1$ の $A$ から $Q$ までの弧の長さが、接点が $C_2$ 上を移動した弧の長さ、すなわち $(n-1)a\theta$ に等しいということである。$C_1$ の半径は $a$ であるから、角 $ACQ$ は $(n-1)\theta$ である。

**考えてみよう** $C$ から見て、$A$ は $Q$ から時計回りの側にあるか、反時計回りの側にあるか。

$C_2$ の外側を反時計回りに転がるとき、円 $C_1$ は反時計回りに自転するので、すでに転がり終えた点は接点から反時計回りに運ばれていく。よって $\overrightarrow{CA}$ は $\theta+\pi+(n-1)\theta = n\theta+\pi$ の方向を向き、$\overrightarrow{CP} = -\overrightarrow{CA}$ は $n\theta$ の方向を向く。（確認：$\theta = 0$ のとき $P = ((n+1)a, 0)$ となる。全体として $C_1$ は $n\theta$ だけ回転しており、これは硬貨を別の硬貨のまわりに転がしたときによく知られた「1 回転余分に回る」現象である。）したがって

$$\overrightarrow{OP} = na(\cos\theta, \sin\theta) + a(\cos n\theta, \sin n\theta),$$

となり、題意のとおり $x(\theta) = a(n\cos\theta + \cos n\theta)$ であり、また

$$y(\theta) = a(n\sin\theta + \sin n\theta).$$

**小問 (ii)(b)**

2 乗して加えると

$$OP^2 = a^2(n^2+1+2n(\cos\theta\cos n\theta + \sin\theta\sin n\theta)) = a^2(n^2+1+2n\cos(n-1)\theta).$$

これを $(n-1)^2a^2 = (n^2-2n+1)a^2$ と等しいとおくと $2n\cos(n-1)\theta = -2n$、すなわち $\cos(n-1)\theta = -1$ を得る。よって

$$\theta = \frac{(2k+1)\pi}{n-1}, \qquad k \in \mathbb{Z},$$

であり、$C_2$ のまわりを 1 周するごとに $n-1$ 個の異なる位置が得られる。これらは $P$ 自身が接点となる瞬間であり、曲線の尖点（cusp）である。

**小問 (ii)(c)**

$\theta_0 = \pi/(n-1)$ とすると $n\theta_0 = \theta_0 + \pi$ であるから

$$\cos n\theta_0 = -\cos\theta_0, \qquad \sin n\theta_0 = -\sin\theta_0.$$

各項に小問 (i) を適用する。ただし $n\theta$ の項については、小さな増分として $n\alpha$ を用いる：

$$\begin{aligned}\frac{y(\theta_0+\alpha)-y(\theta_0)}{a} &\approx n(\alpha\cos\theta_0-\tfrac{1}{2}\alpha^2\sin\theta_0)\\ &\quad+(n\alpha\cos n\theta_0-\tfrac{1}{2}n^2\alpha^2\sin n\theta_0)\\ &= n\alpha\cos\theta_0-\tfrac{1}{2}n\alpha^2\sin\theta_0-n\alpha\cos\theta_0+\tfrac{1}{2}n^2\alpha^2\sin\theta_0\\ &= \tfrac{1}{2}n(n-1)\alpha^2\sin\theta_0,\\ \frac{x(\theta_0+\alpha)-x(\theta_0)}{a} &\approx n(-\alpha\sin\theta_0-\tfrac{1}{2}\alpha^2\cos\theta_0)\\ &\quad+(-n\alpha\sin n\theta_0-\tfrac{1}{2}n^2\alpha^2\cos n\theta_0)\\ &= \tfrac{1}{2}n(n-1)\alpha^2\cos\theta_0,\end{aligned}$$

いずれも誤差は $\alpha^3$ のオーダーである。(i) の $\sin\theta=0$ の場合とまったく同じように 1 次の項がちょうど打ち消し合うので、答えは 2 次の項で決まる。分子と分母を $\frac{1}{2}n(n-1)\alpha^2$ で割ると

$$\frac{y(\theta_0+\alpha)-y(\theta_0)}{x(\theta_0+\alpha)-x(\theta_0)}=\frac{\sin\theta_0+O(\alpha)}{\cos\theta_0+O(\alpha)}\longrightarrow\tan\theta_0,$$

となる。ただし $\cos\theta_0\neq0$ を仮定しており、これは $n\geq4$ のとき成り立つ。$n=3$ のときは $\theta_0=\frac{1}{2}\pi$ であり、同じ計算により逆数の比が $\cot\theta_0=0$ に近づくことがわかるので、弦は垂直になる。

この極限は弦の傾きの極限であるから、$\theta_0$ における接線（tangent）の傾きである。ここで

$$x(\theta_0)=a(n\cos\theta_0-\cos\theta_0)=(n-1)a\cos\theta_0,\qquad y(\theta_0)=(n-1)a\sin\theta_0,$$

であるから、$OP$ は $x$ 軸と角 $\theta_0$ をなし、その傾きは $\tan\theta_0$ である（$n=3$ のときは垂直である）。接線と $OP$ は同じ方向をもつので、$(x(\theta_0),y(\theta_0))$ における接線は $OP$ に平行である。実際には、接線は $P$ を通るので、直線 $OP$ 上にある。

## 検算

- $\theta=0$、$\alpha=0.001$ のとき、比 $(*)$ は $-1999.9998$ であり、$-2/\alpha=-2000$ と比べてよく一致する。
- $n=5$、$\theta_0=\frac{1}{4}\pi$、$\alpha=10^{-4}$ のとき、弦の傾きは 1.0004 であり、$\tan\frac{1}{4}\pi=1$ に近い。
- $\theta_0$ において $OP=(n-1)a$ であるから、(c) の点は (b) で求めた $k=0$ の尖点である。そこでの接線が動径方向を向くのはこのためである。

## よくある間違い

- $C_1$ の回転角を（転がった弧に対応する）$(n-1)\theta$ とし、$C$ が $O$ のまわりを回ることによる余分な $\theta$ を忘れる。
- (c) で 1 次の近似だけを用いる。これでは $0/0$ となり、何もわからない。
- $n=3$ のとき $\theta_0 = \frac{1}{2}\pi$ となり、$\tan\theta_0$ が定義されないことを忘れる。

## STEP のその先へ

この曲線は $n-1$ 個の尖点をもつ外サイクロイド（epicycloid）である。各尖点では速度 $(x'(\theta), y'(\theta))$ が零となるので、通常の公式 $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x = y'/x'$ は使えない。小問 (c) では 2 次まで展開することでこれに対処しているが、これは形を変えたロピタル（l'Hôpital）の定理（l'Hôpital's rule）にほかならない。媒介変数表示された曲線の速度が零となる点は特異点（singular points）と呼ばれ、曲線の微分幾何学（differential geometry）の最初の講義で学ぶ。小問 (i) の背後にある極限とテイラー近似については、Abbott, *Understanding Analysis*（解析学入門書）を参照せよ。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。