解答例

STEP III 2022、第 5 問

純粋数学 • 対称な定積分

STEP III 2022、問 5

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は、OCR が配布している 2022 年の STEP 過去問一式（zip ファイル）のうち、STEP III の問題用紙にある：

www.ocr.org.uk/Images/696587-2022-past-papers.zip

鍵となる考え方

対称な区間 $[-a, a]$ 上では、置換（substitution）$x \mapsto -x$ によって積分を $[0, a]$ 上に折りたたみ、x における値と $-x$ における値を組にすることができる。$1/(1+\text{何か})$ の形の被積分関数では、組 $\frac{1}{1+p} + \frac{1}{1+q}$ がちょうど 1 になるのは $pq = 1$ のときであり、しかもそのときに限る。$\mathrm{e}^x \cdot \mathrm{e}^{-x} = 1$ はその典型例である。この問題の核心は、この組み合わせに気づくこと、そして答えが a になるのはそれが**唯一**の場合であるのはいつかを見抜くことにある。

解答

小問 (i)

$I = \displaystyle\int_{-a}^{a} \frac{1}{1+\mathrm{e}^x}\,\mathrm{d}x$ とおく。$x = -u$ と置換すると（$\mathrm{d}x = -\mathrm{d}u$ であり、積分の上端と下端が入れ替わってもとに戻る）、

$$I = \int_{-a}^{a} \frac{1}{1+\mathrm{e}^{-u}}\,\mathrm{d}u = \int_{-a}^{a} \frac{\mathrm{e}^u}{\mathrm{e}^u+1}\,\mathrm{d}u,$$

となる。ここで分母と分子に e^u を掛けた。これを I のもとの形と足し合わせると、

$$2I = \int_{-a}^{a} \frac{1+\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}\,\mathrm{d}x = \int_{-a}^{a} 1\,\mathrm{d}x = 2a,$$

よって、すべての $a \geq 0$ に対して $I = a$ であり、題意は示された。

小問 (ii)

説明。 $a \geq 0$ に対して $G(a) = \int_0^a g(x)\,\mathrm{d}x$ と定める。g は連続（continuous）であるから、微分積分学の基本定理（fundamental theorem of calculus）により G は微分可能で、$G'(a) = g(a)$ が成り立つ（$a = 0$ では片側微分係数（one-sided derivative）とする）。ところが G は $[0,\infty)$ 上で恒等的に 0 であるから、そこでの導関数は 0 である。したがって、すべての $a \geq 0$ に対して $g(a) = 0$ である。（連続性は重要である。連続でなければ、g はどの積分にも影響を与えずに孤立した点で 0 でない値をとりうる。）

積分を折りたたむ。 0 で分割し、左半分で $x = -u$ とおく：

$$\int_{-a}^{0} \frac{\mathrm{d}x}{1+\mathrm{f}(x)} = \int_0^a \frac{\mathrm{d}u}{1+\mathrm{f}(-u)}.$$

$a = \int_0^a 1\,\mathrm{d}x$ と書くと、

$$\int_{-a}^{a} \frac{\mathrm{d}x}{1+\mathrm{f}(x)} - a = \int_0^a g(x)\,\mathrm{d}x, \qquad \text{ここで} \quad g(x) = \frac{1}{1+\mathrm{f}(x)} + \frac{1}{1+\mathrm{f}(-x)} - 1.$$

を得る。$\mathrm{f} \geq 0$ であるから、どちらの分母も 1 以上であり、g は連続である。

考えてみよう いま説明した結果は一方向の主張である。「必要十分」（if and only if）のうちどちらの向きを与えるのか。また、もう一方の向きはどこから得られるのか。

- すべての $x \geq 0$ に対して $g(x) = 0$ ならば、$\int_0^a g = 0$ であり、すべての $a \geq 0$ に対して積分は a に等しい。この向きはただちに分かる。
- 逆に、すべての $a \geq 0$ に対して積分が a に等しいならば、すべての $a \geq 0$ に対して $\int_0^a g = 0$ であり、最初の段落の結果（この連続な g に適用する）により、すべての $x \geq 0$ に対して $g(x) = 0$ となる。

したがって、積分に関する条件が成り立つのは、すべての $x \geq 0$ に対して $g(x) = 0$ であるとき、かつそのときに限る。

積の条件。 $p = \mathrm{f}(x)$、$q = \mathrm{f}(-x)$ とおく。両辺に $(1+p)(1+q) > 0$ を掛けると、

$$\begin{aligned} \frac{1}{1+p} + \frac{1}{1+q} = 1 &\iff (1+q) + (1+p) = (1+p)(1+q) \\ &\iff 2 + p + q = 1 + p + q + pq \\ &\iff pq = 1. \end{aligned}$$

よって、すべての $x \geq 0$ に対して $g(x) = 0$ であることは、すべての $x \geq 0$ に対して $\mathrm{f}(x)\mathrm{f}(-x) = 1$ であることと同値である。最後に、式 $\mathrm{f}(x)\mathrm{f}(-x)$ は x を $-x$ に置き換え

ても変わらないので、それがすべての $x \geq 0$ に対して 1 に等しいことと、すべての実数 x に対して 1 に等しいことは同値である。以上で同値関係の連鎖が完成する。

小問 (iii)

先ほどとまったく同じように積分を折りたたむ。今度は左半分で $\mathrm{h}(-u) = \mathrm{h}(u)$ を用いる：

$$\begin{aligned}\int_{-a}^{a} \frac{\mathrm{h}(x)}{1+\mathrm{f}(x)}\,\mathrm{d}x &= \int_{0}^{a} \frac{\mathrm{h}(x)}{1+\mathrm{f}(x)}\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{a} \frac{\mathrm{h}(-u)}{1+\mathrm{f}(-u)}\,\mathrm{d}u \\ &= \int_{0}^{a} \mathrm{h}(x)\left(\frac{1}{1+\mathrm{f}(x)} + \frac{1}{1+\mathrm{f}(-x)}\right)\mathrm{d}x \\ &= \int_{0}^{a} \mathrm{h}(x)\,\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

なぜなら、小問 (ii) で示した同値性により、$\mathrm{f}(x)\mathrm{f}(-x) = 1$ のときは常に括弧内が 1 に等しいからである。（条件 $\mathrm{f} \geq 0$ と連続性は、すべての被積分関数を連続にするためのものにすぎない。）

小問 (iv)

考えてみよう $\dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{\cosh x}$ を $\dfrac{\text{定数}}{1+\mathrm{f}(x)}$ の形に書くにはどうすればよいか。

$\cosh x = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^{x} + \mathrm{e}^{-x})$ であるから、分母と分子に e^{x} を掛けて

$$\frac{\mathrm{e}^{-x}\cos x}{\cosh x} = \frac{2\mathrm{e}^{-x}\cos x}{\mathrm{e}^{x}+\mathrm{e}^{-x}} = \frac{2\cos x}{1+\mathrm{e}^{2x}},$$

を得る。$\mathrm{f}(x) = \mathrm{e}^{2x}$ とおく。これは連続かつ正であり、$\mathrm{f}(x)\mathrm{f}(-x) = \mathrm{e}^{2x}\mathrm{e}^{-2x} = 1$ を満たす。また $\mathrm{h}(x) = 2\cos x$ とおく。これは連続な偶関数（even function）である。$a = \frac{1}{2}\pi$ として小問 (iii) を用いると、

$$\int_{-\frac{1}{2}\pi}^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\mathrm{e}^{-x}\cos x}{\cosh x}\,\mathrm{d}x = \int_{0}^{\frac{1}{2}\pi} 2\cos x\,\mathrm{d}x = \Big[2\sin x\Big]_{0}^{\frac{1}{2}\pi} = 2.$$

検算

- 小問 (i) は小問 (iii) で $\mathrm{f}(x) = \mathrm{e}^{x}$、$\mathrm{h} \equiv 1$ とした特別な場合であり、当然ながら $\int_0^a 1\,\mathrm{d}x = a$ を与える。
- 反例：$\mathrm{f}(x) = x^2$ では $\mathrm{f}(x)\mathrm{f}(-x) = x^4 \neq 1$ であり、実際 $\int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \frac{\pi}{2} \neq 1$ となる。
- 小問 (iv) の積分をシンプソンの公式（Simpson's rule）で数値的に計算すると

2.0000000 となる。また、小問 (iii) の恒等式は、$\mathrm{f} = \mathrm{e}^{(\text{奇関数})}$ と偶関数 h を無作為に多数選んで、コンピュータでも確認した。

よくある間違い

- 小問 (ii) の「必要十分」の一方の向きしか証明しないこと。積分に関する条件から $g = 0$ に戻る段階こそ、最初の結果（および g の連続性）が必要になるところである。
- $x \geq 0$ で $\mathrm{f}(x)\mathrm{f}(-x) = 1$ が成り立てば、なぜすべての x で成り立つのかを述べ忘れること。この式は $x \mapsto -x$ に関して対称である。
- 小問 (iv) で、$2\cos x/(1+\mathrm{e}^{2x})$ と書き直さずに $\mathrm{e}^{-x}\cos x/\cosh x$ を直接積分しようとすること。

STEP のその先へ

小問 (ii) の議論は微分積分学の基本定理を「逆向きに」使ったものであり、解析学で連続性の仮定がこれほど頻繁に現れる理由もここにある。積分は個々の点で何が起きているかを見ることができないので、積分から関数の値を復元できるのは連続性があるときだけなのである。折りたたみの技法は、関数を偶関数部分と奇関数部分に分解することの親戚である。ここでは、$\frac{1}{1+\mathrm{f}(x)} - \frac{1}{2}$ が奇関数となるのは、ちょうど $\mathrm{f}(x)\mathrm{f}(-x) = 1$ のときである。Abbott の *Understanding Analysis*（解析学入門書）では、基本定理と、なぜ連続性が必要なのかが丁寧に扱われている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。