解答例

STEP III 2022、第 4 問

純粋数学 • 無限積

> **STEP III 2022、問 4**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は、OCR が配布している 2022 年の STEP 過去問一式（zip ファイル）のうち、STEP III の問題用紙にある：
>
> www.ocr.org.uk/Images/696587-2022-past-papers.zip

この問題は、*Beyond STEP* の第 2.5 節「**ヴィエトの無限積**」で詳しく解説されている：
https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/ch02/viete.html

鍵となる考え方

すべては 2 倍角の公式（double-angle formula）$\sinh 2\theta = 2\sinh\theta\cosh\theta$ を繰り返し用いることに基づいている。1 回用いるごとに sinh の引数は半分になり、cosh の因数が 1 つ残る。n 回半分にすると、残った $\sinh(x/2^n)$ は非常に小さくなり、$x/2^n$ とほぼ同じように振る舞う。したがって $n \to \infty$ とすれば、有限の恒等式が無限積（infinite product）に変わる。最後の 2 つの小問は、うまく選んだ x の値でこの無限積を評価したものと、その三角関数版である。

解答

小問 (i)

$P_n(x) = \cosh\left(\frac{x}{2}\right)\cosh\left(\frac{x}{4}\right)\cdots\cosh\left(\frac{x}{2^n}\right)$ とおく。すべての正の整数 n に対して $\sinh x = 2^n P_n(x)\sinh\left(\frac{x}{2^n}\right)$ が成り立つことを証明する。

基本の場合（*base case*）$n = 1$。 $\theta = x/2$ として 2 倍角の公式を用いると、$\sinh x = 2\cosh\left(\frac{x}{2}\right)\sinh\left(\frac{x}{2}\right)$ となり、これは $n = 1$ の場合の主張である。

帰納段階（*inductive step*）。ある $n = k$ で結果が成り立つと仮定する。$\theta = x/2^{k+1}$ として 2 倍角の公式を用いると

$$\sinh\left(\frac{x}{2^k}\right) = 2\cosh\left(\frac{x}{2^{k+1}}\right)\sinh\left(\frac{x}{2^{k+1}}\right),$$

であるから、

$$\begin{aligned}\sinh x &= 2^k P_k(x)\sinh\left(\frac{x}{2^k}\right) = 2^k P_k(x)\cdot 2\cosh\left(\frac{x}{2^{k+1}}\right)\sinh\left(\frac{x}{2^{k+1}}\right)\\ &= 2^{k+1}P_{k+1}(x)\sinh\left(\frac{x}{2^{k+1}}\right),\end{aligned}$$

となり、これは $n = k+1$ の場合の結果である。数学的帰納法（induction）により、すべての正の整数 n に対して成り立つ。

導出。 $x \neq 0$ ならば $x/2^n \neq 0$ であるから、$\sinh(x/2^n) \neq 0$ である（sinh の零点は 0 のみである）。したがって恒等式の両辺を $x\sinh(x/2^n)/2^n$ で割ることができ、

$$\frac{\sinh x}{x}\cdot\frac{x/2^n}{\sinh(x/2^n)} = P_n(x),$$

を得る。これが示すべきことであった。

小問 (ii)

$y \neq 0$ のとき、マクローリン級数（Maclaurin series）を y で割ると

$$\frac{\sinh y}{y} = 1 + \frac{y^2}{3!} + \frac{y^4}{5!} + \cdots = 1 + y^2\sum_{r=1}^{\infty}\frac{y^{2r-2}}{(2r+1)!}.$$

となる。

> **考えてみよう** 「最初の項以外はすべて 0 に近づく」と言うだけで十分だろうか。

十分とはいえない。項は無限個あるので、その和を上から抑えるべきである。$0 < |y| \leq 1$ のとき $y^{2r-2} \leq 1$ であるから

$$0 \leq \frac{\sinh y}{y} - 1 \leq y^2\sum_{r=1}^{\infty}\frac{1}{(2r+1)!} = y^2(\sinh 1 - 1),$$

となり、右辺は $y \to 0$ のとき 0 に収束（converge）する。よって $\dfrac{\sinh y}{y} \to 1$ であり、逆数をとって $\dfrac{y}{\sinh y} \to 1$ である。

ここで $x \neq 0$ を固定し、(i) の恒等式で $n \to \infty$ とする。$y = x/2^n$ とおくと $y \to 0$ であるから、因数 $\dfrac{x/2^n}{\sinh(x/2^n)}$ は 1 に収束する。したがって左辺は $\dfrac{\sinh x}{x}$ に収束し、一方で右辺は部分積（partial product）$P_n(x)$ である。よって部分積は $\dfrac{\sinh x}{x}$ に収束し、これはまさに次の主張である。

$$\frac{\sinh x}{x} = \cosh\left(\frac{x}{2}\right)\cosh\left(\frac{x}{4}\right)\cdots\cosh\left(\frac{x}{2^n}\right)\cdots.$$

小問 (iii)

$x = \ln 2$ のとき $\mathrm{e}^{x/2^n} = 2^{1/2^n}$ であるから、

$$\cosh\left(\frac{x}{2^n}\right) = \frac{2^{1/2^n} + 2^{-1/2^n}}{2} = \frac{2^{2/2^n} + 1}{2 \times 2^{1/2^n}} = \frac{1 + 2^{1/2^{n-1}}}{2 \times 2^{1/2^n}},$$

となる（分子と分母に $2^{1/2^n}$ を掛けた）。$n = 1$ のときこれは $\cosh\left(\frac{x}{2}\right) = \dfrac{1+2}{2\sqrt{2}} = \dfrac{3}{2\sqrt{2}}$ となり、$n = 2$ のときは

$$\cosh\left(\frac{x}{4}\right) = \frac{1 + 2^{1/2}}{2 \times 2^{1/4}},$$

となって、示すべき式を得る。

(ii) の左辺については、$\sinh(\ln 2) = \frac{1}{2}\left(2 - \frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4}$ であるから $\dfrac{\sinh x}{x} = \dfrac{3}{4\ln 2}$ である。右辺については、最初の N 個の因数の部分積は

$$P_N(\ln 2) = \frac{\prod_{n=1}^{N}\left(1 + 2^{1/2^{n-1}}\right)}{2^N \cdot 2^{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2^N}}} = \frac{3}{2} \cdot \prod_{k=1}^{N-1} \frac{1 + 2^{1/2^k}}{2} \cdot \frac{1}{2^{1-1/2^N}},$$

である。ここで $n = 1$ の因数 $(1+2)/2$ をくくり出し、$k = n - 1$ と添字を付け替え、指数部分の等比級数（geometric series）の和を計算した。$N \to \infty$ のとき $2^{1-1/2^N} \to 2$ であり、(ii) より $P_N(\ln 2) \to \dfrac{3}{4\ln 2}$ である。よって部分積 $\prod_{k=1}^{N-1} \frac{1+2^{1/2^k}}{2}$ は収束し、

$$\frac{3}{4\ln 2} = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1 + 2^{1/2^k}}{2},$$

となる。両辺の $\frac{3}{4}$ を約すと

$$\frac{1}{\ln 2} = \frac{1 + 2^{\frac{1}{2}}}{2} \times \frac{1 + 2^{\frac{1}{4}}}{2} \times \frac{1 + 2^{\frac{1}{8}}}{2} \times \cdots.$$

を得る。

小問 (iv)

sin と cos についても、まったく同じ議論がそのまま通用する。$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$ が同じ形をしているからである。帰納法により

$$\sin x = 2^n \cos\left(\frac{x}{2}\right) \cdots \cos\left(\frac{x}{2^n}\right) \sin\left(\frac{x}{2^n}\right).$$

を得る。$0 < x < \pi$ のとき $0 < x/2^n < \pi$ であるから $\sin(x/2^n) \neq 0$ であり、先ほどと同様に割ることができる。マクローリン級数 $\sin y = y - \frac{y^3}{3!} + \cdots$ から、$0 < |y| \leq 1$ に対して

$$\left|\frac{\sin y}{y} - 1\right| \leq y^2 \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{(2r+1)!} = y^2(\sinh 1 - 1) \to 0,$$

が得られるので $\sin y/y \to 1$ であり、$n \to \infty$ とすると

$$\frac{\sin x}{x} = \cos\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{4}\right)\cos\left(\frac{x}{8}\right)\cdots.$$

となる。（あるいは、(ii) で $x = \mathrm{i}t$ とおき、$\cosh(\mathrm{i}t) = \cos t$ と $\sinh(\mathrm{i}t) = \mathrm{i}\sin t$ を用いてもよい。ただし (ii) の級数による議論は実数 y に対するものだったので、直接やり直すほうがすっきりする。）

$x = \frac{\pi}{2}$ とすると、左辺は $\dfrac{1}{\pi/2} = \dfrac{2}{\pi}$ であり、因数は $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$、$\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$、$\cos\left(\frac{\pi}{16}\right)$ などとなる。

考えてみよう $\cos(\pi/8)$、$\cos(\pi/16)$、... を入れ子になった平方根（nested square roots）に直すにはどうすればよいか。

$\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1$ を $2\cos\theta = \sqrt{2 + 2\cos 2\theta}$ の形で用いる。ここで正の平方根をとったのは、$\cos\theta > 0$ が $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ で成り立つからである。$c_n = 2\cos\left(\pi/2^{n+1}\right)$ とおく。すると $c_1 = 2\cos\frac{\pi}{4} = \sqrt{2}$ であり、$\theta = \pi/2^{n+2}$ とすると

$$c_{n+1} = \sqrt{2 + c_n}.$$

となる。したがって $c_1 = \sqrt{2}$、$c_2 = \sqrt{2+\sqrt{2}}$、$c_3 = \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}$ などとなり、積の第 n 因数は $c_n/2$ である。よって

$$\frac{2}{\pi} = \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} \times \frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2} \times \cdots,$$

が得られる。これは 1593 年のヴィエト（Viète）の公式である。

検算

- (i) で $n = 1$、$x = 2\theta$ とおくと、当然ながら 2 倍角の公式に戻る。
- (iii) では $\cosh(\frac{1}{2}\ln 2) = \frac{3}{2\sqrt{2}} \approx 1.0607$ であり、一般の n に対する式は $n = 1$ のときこれと一致する。
- 数値的には、(iii) の積は速く収束する。最初の 60 個の因数で 1.442695... となり、$1/\ln 2 = 1.4426950\ldots$ と一致する。また (iv) の積は 0.6366197... となり、$2/\pi$ と一致する。どちらもコンピュータで有効数字約 15 桁まで確認した。

よくある間違い

- $\sinh(x/2^n)$ で割るときに、$x \neq 0$ であるからそれが零でないことに触れない。

- (iii) での 1 つずれの誤り（off-by-one error）。$n = 1$ の因数は $3/(2\sqrt{2})$ であり、$(1 + 2^{1/2^k})/2$ の形ではない。また余分な累乗 $2^{1/2} \cdot 2^{1/4} \cdots$ はまとめると因数 2 になり、1 にはならない。
- 問題が求めている級数からの議論をまったくせずに、「$y/\sinh y \to 1$」を仮定してしまう。

STEP のその先へ

無限積 $\prod a_n$ は、無限和が部分和の極限として定義されるのと同様に、部分積の極限として定義される。対数をとると一方が他方に変わるので、$\prod(1 + u_n)$ の収束は $\sum u_n$ の収束と密接に関係している。ここで得た $\sin x/x$ の積は、オイラー（Euler）によるさらに有名な積 $\sin x = x\prod_{k\geq 1}\left(1 - x^2/(k^2\pi^2)\right)$ と並ぶものであり、後者からは $\sum 1/k^2 = \pi^2/6$ が導かれる。小問 (ii) のような議論を厳密にするための極限の丁寧な扱いについては、Abbott, *Understanding Analysis*（解析学の入門書）を読むとよい。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。