解答例

STEP III 2022、第 3 問

純粋数学 • 陰関数の微分

STEP III 2022、問 3

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は、OCR が配布している 2022 年の STEP 過去問一式（zip ファイル）のうち、STEP III の問題用紙にある：

www.ocr.org.uk/Images/696587-2022-past-papers.zip

鍵となる考え方

陰関数微分（implicit differentiation）を行う。停留点（stationary point）では $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ の分子が 0 にならなければならず、そこから y が x で表される（あるいは両者の間に一次の関係が得られる）。これを曲線の方程式に代入し直すと x だけの方程式が一つ残り、問題は「その方程式が二つの実数解をもつのはいつか」に帰着する。(i) ではそれは形を変えた二次方程式であり、(ii) では四次方程式（quartic）である。後者の解の個数を数えるには、その極値点（turning point）を求めればよい。

解答

小問 (i)

$ax^2 + bxy + cy^2 = 1$ を x について陰関数微分すると、

$$2ax + by + (bx + 2cy)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 0.$$

停留点では $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 0$ であるから $2ax + by = 0$、すなわち $y = -\frac{2a}{b}x$ である（$abc \neq 0$ なので b で割ってよい）。これを曲線の方程式に代入すると、

$$ax^2 - 2ax^2 + \frac{4a^2c}{b^2}x^2 = 1$$
$$\frac{a(4ac - b^2)}{b^2}x^2 = 1.$$

$4ac - b^2 \leq 0$ ならば、すべての x に対して左辺は ≤ 0 となる（$a > 0$ であったことに注意）ので、停留点は一つも存在しない。したがって、曲線が二つの停留点をもつな

らば $4ac - b^2 > 0$、すなわち $b^2 < 4ac$ でなければならず、これが示すべきことであった。(逆に $b^2 < 4ac$ のときは $x = \pm|b|/\sqrt{a(4ac - b^2)}$ が得られ、ちょうど二つの点が得られる。)

> **考えてみよう** これらの点において $bx + 2cy$ も 0 になり、導関数がそもそも定義されない、ということはありうるだろうか？

$2ax + by = 0$ と $bx + 2cy = 0$ が同時に成り立つとすると、行列式(determinant)$4ac - b^2$ は 0 でないので、解は $x = y = 0$ のみであり、これは曲線上にない。したがって、二つの点では確かに $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 0$ である。

小問 (ii)

$ay^3 + bx^2y + cx = 1$ を陰関数微分すると、

$$(3ay^2 + bx^2)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + 2bxy + c = 0.$$

よって停留点では $2bxy + c = 0$ である。$c \neq 0$ であるから $x \neq 0$ であり、したがって $y = -\dfrac{c}{2bx}$ である。これを曲線の方程式に代入すると、

$$-\frac{ac^3}{8b^3x^3} - \frac{cx}{2} + cx = 1, \qquad \text{すなわち} \qquad -\frac{ac^3}{8b^3x^3} + \frac{cx}{2} = 1.$$

両辺に $8b^3x^3$ を掛けて整理すると、

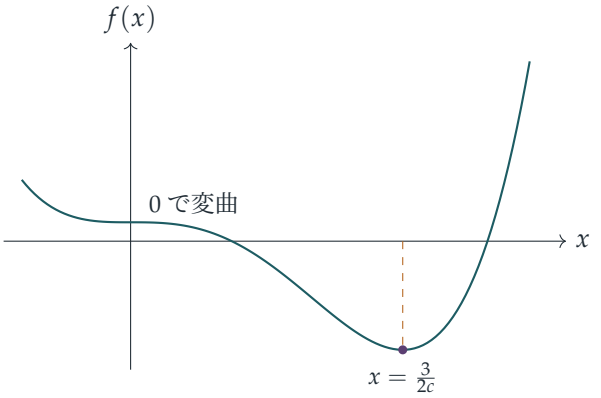
$$4cb^3x^4 - 8b^3x^3 - ac^3 = 0,$$

となり、これが求める方程式である。

左辺を $f(x)$ とおく。$y = -c/(2bx)$ は x によって定まるので、各停留点の x 座標はすべて異なる。したがって、停留点が二つあるということは、f が少なくとも二つの相異なる実数解をもつということである。f の解の個数を数えるために、その導関数を調べる。

$$f'(x) = 16cb^3x^3 - 24b^3x^2 = 8b^3x^2(2cx - 3).$$

因数 x^2 は符号を変えないので、f' が符号を変えるのは $x = \frac{3}{2c}$ においてのみである。$c > 0$ と仮定する。このとき最高次の係数 (leading coefficient) $4cb^3$ は正であり ($b > 0$ なので)、f は $x < \frac{3}{2c}$ で狭義単調減少、$x > \frac{3}{2c}$ で狭義単調増加である。点 $x = 0$ は停留点ではあるが変曲点 (point of inflection) にすぎない。よって f は $\frac{3}{2c}$ の両側にそれぞれ高々一つの解しかもたず、二つの相異なる解をもつのは、その最小値が負であるとき、かつそのときに限る。$c < 0$ ならばすべてが逆になる。f は増加したのち減少し、二つの相異なる解をもつのは、その最大値が正であるとき、かつそのときに限る。いずれの場合も、条件は $c\,f\left(\frac{3}{2c}\right) < 0$ である。



$a = -1, b = c = 1$ の場合：$f(x) = 4x^4 - 8x^3 + 1$ はただ一つの極値点、すなわち $x = \frac{3}{2}$ における極小点をもち、二つの実数解をもつ。

次に、極値点での値を計算する。

$$\begin{aligned} f\left(\tfrac{3}{2c}\right) &= 4cb^3 \cdot \frac{81}{16c^4} - 8b^3 \cdot \frac{27}{8c^3} - ac^3 \\ &= \frac{81b^3}{4c^3} - \frac{108b^3}{4c^3} - ac^3 = -\frac{27b^3 + 4ac^6}{4c^3}. \end{aligned}$$

よって

$$c\, f\left(\tfrac{3}{2c}\right) = -\frac{4ac^6 + 27b^3}{4c^2},$$

であり、これが負となるのはちょうど $4ac^6 + 27b^3 > 0$ のときである。したがって、曲線が二つの停留点をもつならば $4ac^6 + 27b^3 > 0$ である。

小問 (iii)

第 2 式と第 3 式は、$2bxy + c$ と $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ の係数 $3ay^2 + bx^2$ がともに 0 になることを述べているので、これは (ii) の方法が破綻する曲線上の点である。$c \neq 0$ であるから、第 2 式より $x \neq 0$ かつ $y = -\dfrac{c}{2bx}$ である。最初の二つの式は (ii) で用いたものとまったく同じであるから、x は

$$4cb^3x^4 - 8b^3x^3 - ac^3 = 0. \qquad (*)$$

を満たす。$y = -c/(2bx)$ を第 3 式に代入すると、

$$\frac{3ac^2}{4b^2x^2} + bx^2 = 0 \quad \Longrightarrow \quad 4b^3x^4 = -3ac^2.$$

これに c を掛けると $(*)$ の第 1 項は $-3ac^3$ となるので、$(*)$ は

$$-3ac^3 - 8b^3x^3 - ac^3 = 0 \quad \Longrightarrow \quad x^3 = -\frac{ac^3}{2b^3}.$$

となる。$x^4 = -\dfrac{3ac^2}{4b^3}$ をこれで割ると（$x \neq 0$ なので割ってよい）、

$$x = \frac{-3ac^2/(4b^3)}{-ac^3/(2b^3)} = \frac{3}{2c}.$$

を得る。つまり、この解は (ii) の f の極値点にちょうど位置している。$x = \frac{3}{2c}$ を $x^3 = -\frac{ac^3}{2b^3}$ に代入し直すと、

$$\frac{27}{8c^3} = -\frac{ac^3}{2b^3} \quad \Longrightarrow \quad 54b^3 = -8ac^6 \quad \Longrightarrow \quad 4ac^6 + 27b^3 = 0,$$

となり、示すべきことが得られた。（同じことだが、(ii) の公式により $f\left(\frac{3}{2c}\right) = 0$ である。）これは (ii) の境界の場合である。四次方程式の二つの解が極値点で合わさって重根（repeated root）となり、曲線はそこで二つの停留点の代わりに特異点をもつ。

検算

- (i) で $a = c = 1, b = 1$ とする。曲線 $x^2 + xy + y^2 = 1$ は楕円であり、$b^2 = 1 < 4$ である。その停留点は $x = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}, y = \mp\frac{2}{\sqrt{3}}$ にあり、確かに曲線上にある。
- (ii) で $a = -1, b = c = 1$ とすると $4ac^6 + 27b^3 = 23 > 0$ であり、f の最小値は $f(\frac{3}{2}) = -5.75 = -\frac{23}{4}$ となって、$-\frac{27b^3+4ac^6}{4c^3}$ と一致する。
- (iii) で $a = -2, c = 1.3$ とし、b を $27b^3 = -4ac^6$ となるように選ぶ。すると $x = \frac{3}{2c}$, $y = -\frac{c}{2bx}$ は丸め誤差の範囲で三つの式すべてを満たす。また、数千個のランダムな (a, b, c) に対するコンピュータによる検証でも、停留点の個数が (i) と (ii) の条件と一致することが確かめられた。

よくある間違い

- $x = 0$ が四次式の臨界点であることを忘れる。これは変曲点であって極値点ではなく、そのことを述べることで初めて解が高々二つであると結論できる。
- c の符号を見落とす。極値点が極小点となるのは $c > 0$ のときに限られる。条件を $c\,f(\frac{3}{2c}) < 0$ と書けば、両方の場合を一度に扱える。
- (i) で、$b^2 = 4ac$ の場合は $0 = 1$ となり、やはり停留点をもたないことに触れない。

STEP のその先へ

量 $4ac^6 + 27b^3$ は、定数倍を除いてこの四次式の**判別式**（discriminant）である。二次式に対する $b^2 - 4ac$（および三次式 $t^3 + pt + q$ に対する $4p^3 + 27q^2$）と同様に、これは

四次式が重根をもつときにちょうど 0 になる。小問 (iii) はその幾何学的な意味を示している。重根は曲線の**特異点**（singular point）、すなわち $ay^3 + bx^2y + cx$ の二つの偏導関数（partial derivative）が同時に 0 になる点に対応する。特異点と判別式は代数幾何学（algebraic geometry）の出発点である。多項式と曲線に関連する考え方への、やさしく視覚的な入門としては Needham, *Visual Complex Analysis*（視覚的な複素解析入門）を、この種の問題をさらに解きたければ Siklos, *Advanced Problems in Mathematics*（STEP 対策の問題集）を手に取ってみるとよい。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。