解答例

STEP III 2022、第 2 問

純粋数学 • 無限降下法

> **STEP III 2022、問 2**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は、OCR が配布している 2022 年の STEP 過去問一式（zip ファイル）のうち、STEP III の問題用紙にある：
>
> www.ocr.org.uk/Images/696587-2022-past-papers.zip

この問題は、*Beyond STEP* の第 1.5 節「**無限降下法**」で詳しく解説されている：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/ch01/infinite-descent.html

鍵となる考え方

これはフェルマー（Fermat）の**無限降下法**（method of infinite descent）である。0 でない整数による解が存在すると仮定する。整除性（divisibility）の議論により、すべての変数が共通の因数をもつことが示される。その因数で割ると、真に小さい 0 でない整数による、同じ種類の（あるいはそれに近い種類の）新しい解が得られる。正の整数はいつまでも減り続けることはできないので、これが永遠に続くことはありえない。各小問でなすべきことは、注目すべき正しい素数（prime、2 または 3）を見つけ、新しい解が本当に元の解と同じ形をしていることを確かめることである。

解答

全体を通して二つの事実を用いる。素数 m が x^k を割り切るならば、m は x を割り切る。また、x が $m \geq 2$ の 0 でない倍数ならば、x/m は $|x/m| < |x|$ を満たす 0 でない整数である。

小問 (i)

a, b, c を 0 でない整数として、$a^3 + 2b^3 + 4c^3 = 0$ と仮定する。このとき

$$a^3 = -2\left(b^3 + 2c^3\right)$$

は偶数である。奇数の3乗は奇数であるから、a は偶数である。$a = 2p$ とおく。すると p は $|p| = \frac{1}{2}|a| < |a|$ を満たす0でない整数である。代入すると

$$8p^3 + 2b^3 + 4c^3 = 0 \quad \Longrightarrow \quad 4p^3 + b^3 + 2c^3 = 0.$$

これが最初の主張である。

次に、新しい方程式に対して同じ議論を繰り返す。$b^3 = -2\left(2p^3 + c^3\right)$ が得られるので b は偶数であり、$b = 2q$ とおくと

$$4p^3 + 8q^3 + 2c^3 = 0 \quad \Longrightarrow \quad 2p^3 + 4q^3 + c^3 = 0.$$

もう一度繰り返すと、$c^3 = -2\left(p^3 + 2q^3\right)$ であるから $c = 2r$ とおけて、

$$2p^3 + 4q^3 + 8r^3 = 0 \quad \Longrightarrow \quad p^3 + 2q^3 + 4r^3 = 0.$$

ここで $p = a/2$、$q = b/2$、$r = c/2$ は、$|p| < |a|$、$|q| < |b|$、$|r| < |c|$ を満たす0でない整数であり、これが求めるものであった。

考えてみよう なぜこのことから、単に「別の解がある」ということではなく、解がまったく存在しないことがいえるのだろうか？

0でない整数による解が存在すると仮定する。そのすべての中から、$|a|$ ができるだけ小さいものを一つ選ぶ。空でない正の整数の集合には必ず最小元が存在するので、このような選び方は可能である。すると上の議論により、$|p| < |a|$ を満たす0でない整数による別の解 (p, q, r) が得られ、これは $|a|$ の最小性に矛盾する。したがって、そのような整数 a、b、c は存在しない。（同じことであるが、この操作を続けると正の整数の無限に続く狭義単調減少列 $|a| > |a/2| > |a/4| > \cdots$ が得られることになり、それは不可能である。）

小問 (ii)

今度用いる素数は3である。a, b, c を0でない整数として、$9a^3 + 10b^3 + 6c^3 = 0$ と仮定する。

- $10b^3 = -3\left(3a^3 + 2c^3\right)$ であるから、3は $10b^3$ を割り切る。3は10を割り切らないので b^3 を割り切り、したがって b を割り切る。$b = 3q$ とおく。すると $9a^3 + 270q^3 + 6c^3 = 0$、すなわち

$$3a^3 + 90q^3 + 2c^3 = 0.$$

- 次に $2c^3 = -3\left(a^3 + 30q^3\right)$ であるから $3 \mid c$ である。$c = 3r$ とおくと $3a^3 + 90q^3 + 54r^3 = 0$、すなわち

$$a^3 + 30q^3 + 18r^3 = 0.$$

► 最後に $a^3 = -3\left(10q^3 + 6r^3\right)$ であるから $3 \mid a$ である。$a = 3p$ とおくと $27p^3 + 30q^3 + 18r^3 = 0$、すなわち

$$9p^3 + 10q^3 + 6r^3 = 0.$$

よって $(p, q, r) = (a/3, b/3, c/3)$ は、$|p| < |a|$ を満たす 0 でない整数による同じ方程式の解である。小問 (i) と同様に、$|a|$ が最小となる解を選ぶ。これにより矛盾が生じるので、0 でない整数解は存在しない。

小問 (iii)

3 の倍数でない整数は、ある整数 n を用いて $3n \pm 1$ と表せる。このとき

$$(3n \pm 1)^2 = 9n^2 \pm 6n + 1 = 3\left(3n^2 \pm 2n\right) + 1,$$

であり、これは 3 の倍数より 1 大きい。一方、3 の倍数の 2 乗は 3 の倍数（実際には 9 の倍数）である。

よって、平方数を 3 で割った余りは 0 または 1 であり、余りが 0 となるのは元の数自身が 3 の倍数であるときに限る。$x^2 + y^2$ について、考えられる余りは

$$0 + 0 = 0, \qquad 0 + 1 = 1, \qquad 1 + 1 = 2.$$

である。したがって、$x^2 + y^2$ が 3 の倍数となるのは両方の余りが 0 のとき、すなわち x と y がともに 3 の倍数のときに限る。

さて、a, b, c を 0 でない整数として、$a^2 + b^2 = 3c^2$ と仮定する。右辺は 3 の倍数であるから、いま示した結果により $a = 3p$、$b = 3q$ と表せる。このとき

$$9p^2 + 9q^2 = 3c^2 \quad \Longrightarrow \quad c^2 = 3\left(p^2 + q^2\right).$$

よって c^2 は 3 の倍数である。最初の結果より、c は 3 の倍数でなければならない。そうでなければ c^2 は 3 の倍数より 1 大きくなるからである。$c = 3r$ とおくと

$$9r^2 = 3\left(p^2 + q^2\right) \quad \Longrightarrow \quad p^2 + q^2 = 3r^2.$$

これは、$|p| < |a|$ を満たす 0 でない整数による同じ方程式の解である。$|a|$ が最小となる解を選べば前と同じ矛盾が生じるので、0 でない解は存在しない。

小問 (iv)

ここでは 4 を法（modulo）として考える。偶数 $2m$ の 2 乗は $4m^2 \equiv 0$ であり、奇数 $2m + 1$ の 2 乗は $4m^2 + 4m + 1 \equiv 1 \pmod 4$ である。よって、三つの平方数の和を 4 で割った余りは、三つのうち奇数であるものの個数（0、1、2 または 3）に等しい。これが 4 の倍数となるのは、三つの数がすべて偶数のときに限る。

考えてみよう $a^2+b^2+c^2=4abc$ のすべてを半分にすると、同じ方程式に戻るだろうか？

戻らない。$a=2p$、$b=2q$、$c=2r$ とすると、方程式は $4(p^2+q^2+r^2)=32pqr$、すなわち $p^2+q^2+r^2=8pqr$ となる。係数が 2 倍になっている。そこで、半分にする操作で**保たれる**、より強い主張を証明する。

主張. どの整数 $k\geq 2$ に対しても、$a^2+b^2+c^2=2^kabc$ を満たす 0 でない整数は存在しない。

存在したと仮定する。そのようなすべての解（$k\geq 2$ は任意）の中から、$|a|$ ができるだけ小さいものを選ぶ。$k\geq 2$ であるから、右辺 2^kabc は 4 の倍数である。よって $a^2+b^2+c^2$ は 4 の倍数であり、上の注意により a、b、c はすべて偶数である：$a=2p$、$b=2q$、$c=2r$。このとき

$$4\left(p^2+q^2+r^2\right)=2^k\cdot 8pqr \quad\Longrightarrow\quad p^2+q^2+r^2=2^{k+1}\,pqr.$$

これは指数が $k+1\geq 2$ で $|p|<|a|$ を満たす 0 でない整数による解であり、a の選び方に矛盾する。よって主張は成り立つ。$k=2$ の場合から、$a^2+b^2+c^2=4abc$ を満たす 0 でない整数 a,b,c は存在しないことがわかる。

検算

- $|a|,|b|,|c|\leq 40$ を満たす 0 でないすべての a,b,c についてコンピュータで探索したところ、四つの方程式のいずれの解も、$2\leq k\leq 6$ に対する $a^2+b^2+c^2=2^kabc$ の解も見つからなかった。
- 小問 (iv) の議論が成り立つのは、係数が 2 の累乗だからである。この形の方程式の中には解を**もつ**ものもある。たとえば $1^2+1^2+1^2=3\cdot 1\cdot 1\cdot 1$ や $3^2+3^2+3^2=1\cdot 3\cdot 3\cdot 3$ である。これらでは係数が奇数なので、mod 4 の議論は手がかりをもたない。
- 惜しい例で降下法を試してみよう：$a^2+b^2=3c^2$ は $(a,b,c)=(1,1,1)$ では成り立たない。$1+1=2$ が 3 の倍数ではないからであり、これはまさに小問 (iii) における「$1+1=2$」の場合である。

よくある間違い

- 降下法からなぜ矛盾が生じるのかを述べ忘れること。「より小さい解が得られる」というだけでは、最小の解（あるいは正の整数はいつまでも減り続けられないとい

う事実）を持ち出すまでは証明にならない。

- 小問 (iv) で、半分にしても方程式は変わらないと主張すること。実際には変わる：係数が 2 倍になるのであり、だからこそ主張を強める必要があるのである。
- 理由を述べずに「$3 \mid c^2$ より $3 \mid c$」と書くこと。ここでの理由は小問 (iii) の最初の結果である（より一般には、3 が素数であることによる）。

STEP のその先へ

無限降下法は、フェルマーが $x^4 + y^4 = z^2$ には正の整数解が存在しないことを証明し、それによって彼の最終定理（Last Theorem）の $n = 4$ の場合を解決した方法である。ここでの各降下は、適当な素数の累乗を法として、変数がすべてはその素数で割り切れないような解をこの方程式がもたないことを示すことに相当する。これは p 進数（p-adic numbers）や、現代整数論における局所大域（local–global）の考え方への第一歩である。有名な方程式 $a^2 + b^2 + c^2 = 3abc$（マルコフ（Markov）方程式）は無限に多くの解をもち、それらは美しい木構造によって生成される。ダベンポート（Davenport）の *The Higher Arithmetic*（高等算術）は、降下法、合同式、平方和をちょうどこの水準で扱っている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。