解答例

STEP III 2022、第 12 問

確率・統計 ・ 円内のランダムな弦

STEP III 2022、問 12

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は、OCR が配布している 2022 年の STEP 過去問一式（zip ファイル）のうち、STEP III の問題用紙にある：

www.ocr.org.uk/Images/696587-2022-past-papers.zip

この問題は、*Beyond STEP* の第 12.3 節「「ランダム」とは何を意味するか？」で詳しく解説されている：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/ch12/bertrand.html

鍵となる考え方

この問題に現れる弦（chord）は、すべて一つの事実から導かれる。半径 a の円で、中心からの距離が d である弦の長さは $2\sqrt{a^2 - d^2}$ である。したがって、なすべきことは d を確率変数で表し、それから平均をとることである。小問 (ii) で置換（substitution）$u = a^2 - r^2 \sin^2 t$ が自然なのは、R の確率密度関数（probability density function）が、この置換に必要な因子 r をちょうど与えてくれるからである。

解答

小問 (i)

角 AOB を Θ とする。Θ は $[0, 2\pi]$ 上の一様分布（uniform distribution）に従い、確率密度は $\frac{1}{2\pi}$ である。三角形 AOB は頂角 Θ の二等辺三角形（isosceles triangle）である。O から AB に垂線を下ろすと、角と弦はともに二等分されるので、

$$AB = 2a \sin \tfrac{1}{2}\Theta.$$

この範囲では $\sin \frac{1}{2}\Theta \geq 0$ であるから、これはすべての $\Theta \in [0, 2\pi]$ について成り立つ。$\Theta > \pi$ のときは優角（reflex angle）を測っていることになるが、弦は同じである。し

たがって

$$\mathrm{E}(AB) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} 2a\sin\tfrac{1}{2}\theta\,\mathrm{d}\theta = \frac{a}{\pi}\Big[-2\cos\tfrac{1}{2}\theta\Big]_0^{2\pi} = \frac{a}{\pi}(2+2) = \frac{4a}{\pi}.$$

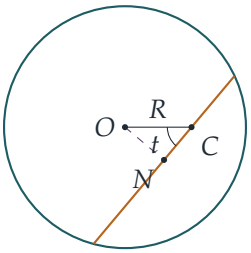
小問 (ii)

R の確率密度関数。$0 \le r \le a$ のとき、事象 $R \le r$ は、C が O を中心とする半径 r の円板の内部にあることを意味する。確率は面積に比例するから、

$$\mathrm{P}(R \le r) = \frac{\pi r^2}{\pi a^2} = \frac{r^2}{a^2}, \qquad \text{よって} \qquad f_R(r) = \frac{2r}{a^2} \quad (0 \le r \le a),$$

であり、それ以外では $f_R(r) = 0$ である。

弦の長さ。O から弦に下ろした垂線の足を N とする。直角三角形 ONC において、斜辺（hypotenuse）は $OC = R$、C における角は t であるから、$ON = R\sin t$ である。



中心からの垂線は弦を二等分し、N は弦の中点である。よって、O、N と弦の一端がつくる三角形に三平方の定理（Pythagoras' theorem）を用いると、

$$\text{弦の長さ} = 2\sqrt{a^2 - R^2\sin^2 t}.$$

$R < a$ であるから、根号の中は正である。C の両側にわたる弦全体を数えていることに注意する。

長さの期待値（expected value）。t を固定し、C を無作為に選ぶと、

$$\mathrm{L}(t) = \int_0^a 2\sqrt{a^2 - r^2\sin^2 t}\,\frac{2r}{a^2}\,\mathrm{d}r.$$

$\sin t \ne 0$ となるように $0 < t < \frac{1}{2}\pi$ とする。$u = a^2 - r^2\sin^2 t$ と置換すると $\mathrm{d}u = -2r\sin^2 t\,\mathrm{d}r$ であり、$r = 0$ のとき $u = a^2$、$r = a$ のとき $u = a^2(1 - \sin^2 t) = a^2\cos^2 t$ である。すると

$$\mathrm{L}(t) = \frac{2}{a^2\sin^2 t}\int_{a^2\cos^2 t}^{a^2} u^{1/2}\,\mathrm{d}u = \frac{2}{a^2\sin^2 t}\cdot\frac{2}{3}\left(a^3 - a^3\cos^3 t\right) = \frac{4a(1-\cos^3 t)}{3\sin^2 t},$$

となる。ここで $(a^2\cos^2 t)^{3/2} = a^3\cos^3 t$ を用いた。鋭角では $\cos t \ge 0$ であるから、これは正しい。以上で求める式が得られた。

考えてみよう 分母 $\sin^2 t$ を、$1-\cos^3 t$ と約分できる形に変えるにはどうすればよいか。

$c=\cos t$ とおく。すると $\sin^2 t = 1-c^2 = (1-c)(1+c)$ であり、$1-c^3$ は 3 乗の差なので $(1-c)(1+c+c^2)$ と因数分解できる。$c \neq 1$ であるから、$1-c$ を約分できて、

$$\mathrm{L}(t) = \frac{4a}{3}\cdot\frac{1+c+c^2}{1+c} = \frac{4a}{3}\left(c+\frac{1}{1+c}\right),$$

となる。ここで $c(1+c)+1 = 1+c+c^2$ を用いた。最後に、$1+\cos t = 2\cos^2\frac{1}{2}t$ より $\dfrac{1}{1+\cos t} = \frac{1}{2}\sec^2\frac{1}{2}t$ であるから、

$$\mathrm{L}(t) = \frac{4a}{3}\left(\cos t + \frac{1}{2}\sec^2\left(\frac{1}{2}t\right)\right),$$

となり、求める式が得られる。この形は $t=0$ でも問題がなく、$\frac{4a}{3}\cdot\frac{3}{2} = 2a$ を与える。C を通り OC に沿う弦は直径であるから、これは正しい。

小問 (iii)

T の確率密度は $[0, \frac{1}{2}\pi]$ 上で $\frac{2}{\pi}$ である。L の 2 番目の形（$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\tan\frac{1}{2}t = \frac{1}{2}\sec^2\frac{1}{2}t$ であるから積分しやすい）を用いると、

$$\begin{aligned}\mathrm{E}\big(\mathrm{L}(T)\big) &= \frac{2}{\pi}\cdot\frac{4a}{3}\int_0^{\pi/2}\left(\cos t + \frac{1}{2}\sec^2\frac{1}{2}t\right)\mathrm{d}t = \frac{8a}{3\pi}\left[\sin t + \tan\frac{1}{2}t\right]_0^{\pi/2}\\ &= \frac{8a}{3\pi}(1+1) = \frac{16a}{3\pi}.\end{aligned}$$

検算

- $t=\frac{1}{2}\pi$ のとき弦は OC に垂直であり、$\mathrm{L} = \frac{4a}{3}(0+\frac{1}{2}\cdot 2) = \frac{4a}{3}$ である。直接計算しても $\int_0^a 2\sqrt{a^2-r^2}\,\frac{2r}{a^2}\,\mathrm{d}r = \frac{4a}{3}$ となる。
- t が 0 から $\frac{1}{2}\pi$ まで動くとき、$\mathrm{L}(t)$ は $2a$ から $\frac{4}{3}a$ まで減少するはずであり、(iii) の答え $\frac{16}{3\pi}a \approx 1.698a$ は、平均である以上当然のことながら、この間にある。
- $a=1.7$、$t=0.7$ として、弦の長さを R の確率密度に関して数値積分すると 3.01799 となり、$\mathrm{L}(0.7)$ の 2 つの式の値と一致する。(i) の答え $\frac{4}{\pi}a \approx 1.273a$ も数値積分で確かめた。

よくある間違い

- R を $[0,a]$ 上の一様分布とみなしてしまう。点は**面積**について一様に分布しており、中心から遠いところほど面積が多いので、確率密度は $2r/a^2$ となる。

- C の片側にある弦の部分だけを用いてしまう。あるいは $ON = R\cos t$ と書いてしまう（これは弦に沿った距離 CN である）。
- 小問 (iii) で、$\mathrm{L}(t)$ の 2 番目の形ではなく 1 番目の形を積分してしまう。2 番目の形は、1 行で積分できるように問題文があらかじめ用意したものである。

STEP のその先へ

これは幾何確率（geometric probability）の問題であり、「無作為に選ぶ」という言葉は、分布を定めて初めて意味をもつ。答え $\frac{4a}{\pi}$ と $\frac{16a}{3\pi}$ が異なるのは、それぞれが異なる弦の選び方を表しているからであり、これがベルトランの逆説（Bertrand's paradox）の要点である。積分幾何学（integral geometry）は、回転と平行移動によって変わらない直線全体の上の測度を用いて、これを体系的に扱う。領域上の連続分布や、ここで計算したような期待値については、Blitzstein and Hwang, *Introduction to Probability*（確率論入門）を参照のこと。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。