解答例

STEP III 2022、第 10 問

力学 ・ ばねのつり合い

STEP III 2022、問 10

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は、OCR が配布している 2022 年の STEP 過去問一式（zip ファイル）のうち、STEP III の問題用紙にある：

www.ocr.org.uk/Images/696587-2022-past-papers.zip

鍵となる考え方

P における角が直角なので、2 本のばねの力は互いに垂直である。したがって各ばねの方向に力を分解すれば、連立方程式を解くことなく、それぞれの張力（tension）が単独で求まる。エネルギーについては、弾性エネルギーの項と重力の項が見事に組み合わさり、p は θ の簡単な関数となる。そのうえで小問 (ii) の本質は、θ に対する物理的な制約、すなわち両方のばねが伸びていなければならないという条件にある。

解答

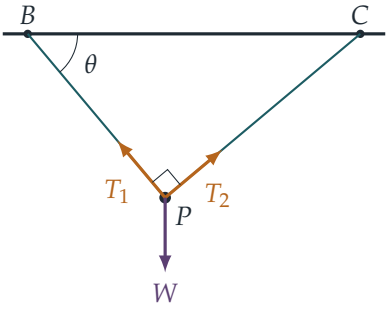
P を質点とみなし、ばねは軽く、フックの法則（Hooke's law）に従うものとする。すなわち、弾性係数（modulus of elasticity）λ、自然長（natural length）a のばねを長さ l まで伸ばしたとき、張力は $\lambda(l-a)/a$、蓄えられるエネルギーは $\lambda(l-a)^2/(2a)$ である。

小問 (i)

$BC = 2a$ かつ角 $BPC = 90^\circ$ であるから、三角形 BPC の斜辺（hypotenuse）は BC であり、

$$PB = 2a\cos\theta, \qquad PC = 2a\sin\theta, \qquad \angle PCB = 90^\circ - \theta.$$

PB、PC の張力をそれぞれ T_1、T_2 とする。



直線 PB は水平と角 θ をなすので、鉛直とは角 $90^\circ - \theta$ をなす。同様に PC は鉛直と角 θ をなす。$PB \perp PC$ であるから、PB 方向に分解すると現れるのは T_1 と重力だけであり、重力の BP 方向（B から遠ざかる向き）の成分は $W\cos(90^\circ - \theta) = W\sin\theta$ である。よって

$$T_1 = W\sin\theta, \qquad \text{同様に、分解方向}PC, \qquad T_2 = W\cos\theta.$$

フックの法則より

$$T_1 = \frac{s_1 W(2a\cos\theta - a)}{a} = s_1 W(2\cos\theta - 1), \qquad T_2 = s_2 W(2\sin\theta - 1).$$

等しいとおいて

$$s_1 = \frac{\sin\theta}{2\cos\theta - 1}, \qquad s_2 = \frac{\cos\theta}{2\sin\theta - 1},$$

これが求める s_1 であり、あわせて s_2 も得られた。

小問 (ii)

重力による位置エネルギー。 P は BC より、P から引いた三角形の高さ $PB\sin\theta = 2a\sin\theta\cos\theta = a\sin 2\theta$ だけ下にある。BC を基準の高さとすると、重力による位置エネルギー（potential energy）は $-Wa\sin 2\theta$ である。

弾性エネルギー。 PB の伸び（extension）は $a(2\cos\theta - 1)$ であるから、小問 (i) を用いて

$$\frac{s_1 W\, a^2(2\cos\theta - 1)^2}{2a} = \tfrac{1}{2}Wa\, s_1(2\cos\theta - 1)^2 = \tfrac{1}{2}Wa\sin\theta\,(2\cos\theta - 1),$$

同様に PC のエネルギーは $\frac{1}{2}Wa\cos\theta\,(2\sin\theta - 1)$ である。

合計。 足し合わせると

$$\begin{aligned} -paW &= -Wa\sin 2\theta + \tfrac{1}{2}Wa(2\sin\theta\cos\theta - \sin\theta + 2\sin\theta\cos\theta - \cos\theta) \\ &= -Wa\sin 2\theta + Wa\sin 2\theta - \tfrac{1}{2}Wa(\sin\theta + \cos\theta), \end{aligned}$$

したがって

$$p = \tfrac{1}{2}(\sin\theta + \cos\theta) = \tfrac{\sqrt{2}}{2}\sin(\theta + \tfrac{\pi}{4}).$$

考えてみよう θ は 0 と $\frac{\pi}{2}$ の間の任意の値をとれるだろうか？

とれない。弾性係数 s_1W、s_2W は正であり、張力 $W\sin\theta$、$W\cos\theta$ も正であるから、両方のばねは**伸びて**いなければならない。すなわち $2\cos\theta - 1 > 0$ かつ $2\sin\theta - 1 > 0$ である。（もしどちらかが 0 ならば、そのばねは力を及ぼさないにもかかわらず、0 でない張力を生じなければならないことになる。）よって $\cos\theta > \frac{1}{2}$ かつ $\sin\theta > \frac{1}{2}$、すなわち

$$\tfrac{\pi}{6} < \theta < \tfrac{\pi}{3}, \qquad \text{したがって} \qquad \tfrac{5\pi}{12} < \theta + \tfrac{\pi}{4} < \tfrac{7\pi}{12}.$$

$\frac{\pi}{2}$ に関して対称なこの区間において、$\sin(\theta + \frac{\pi}{4})$ は高々 1 であり（$\theta = \frac{\pi}{4}$ で等号成立）、端点での値 $\sin\frac{5\pi}{12} = \sin\frac{7\pi}{12}$ より真に大きい。ここで

$$\sin\tfrac{5\pi}{12} = \sin(\tfrac{\pi}{4} + \tfrac{\pi}{6}) = \tfrac{\sqrt{2}}{2}\cdot\tfrac{\sqrt{3}}{2} + \tfrac{\sqrt{2}}{2}\cdot\tfrac{1}{2} = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)}{4},$$

であるから

$$\tfrac{1}{2}\sqrt{2} \geq p > \tfrac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)}{4} = \tfrac{1}{4}(1+\sqrt{3}),$$

となり、示すべきことが得られた。

有効数字 1 桁。 $0.65 \leq p < 0.75$ を示せばよく、根号の評価は 2 乗することで正当化する。$1.6^2 = 2.56 < 3$ より $\sqrt{3} > 1.6$ であるから、$p > \frac{1}{4}(2.6) = 0.65$ である。$1.5^2 = 2.25 > 2$ より $\sqrt{2} < 1.5$ であるから、$p \leq \frac{1}{2}\sqrt{2} < 0.75$ である。よって有効数字（significant figure）1 桁で $p = 0.7$ である。

検算

- $\theta = \frac{\pi}{4}$ のとき配置は対称であり、実際 $s_1 = s_2 = \frac{1}{\sqrt{2}-1} = \sqrt{2}+1$、$p = \frac{1}{2}\sqrt{2} \approx 0.7071$ となる。
- $\theta \to \frac{\pi}{6}^+$ のとき $s_1 \to \infty$ となる。ばね PB は自然長にあり、張力を生じるには無限に硬くなければならない。このとき $p \to \frac{1}{4}(1+\sqrt{3}) \approx 0.6830$ となり、これは下限に一致する。
- $(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3})$ 内の多数の無作為な θ について、求めた位置が全位置エネルギーの停留点（stationary point）であること（したがって確かに平衡（equilibrium）であること）、およびそのエネルギーが $-\frac{1}{2}Wa(\sin\theta + \cos\theta)$ に等しいことを、計算機で確認した。

よくある間違い

- 重力による位置エネルギーを正の符号にしてしまう。P は基準の高さより**下**にある。

- $\frac{1}{2}(\sin\theta+\cos\theta)$ を $(0,\frac{\pi}{2})$ 全体で考えてしまい、誤った下限 $\frac{1}{2}$ を得る。ばねは張力を受けていなければならない。
- 誤差が四捨五入の結果を変えないことを示さずに、$\sqrt{3}\approx 1.732$ を用いる。

STEP のその先へ

小問 (ii) で項が打ち消し合ったのは偶然ではない。平衡状態では全位置エネルギーが停留しており、フックの法則に従うばねでは弾性エネルギーがちょうど（張力 $\times$ 伸び）の半分になるので、これが重力に逆らってなされる仕事と結びつくのである。平衡を位置エネルギーの停留点として調べ、その安定性（stability）を 2 階導関数によって調べることは、大学 1 年次の力学の中心的なテーマである。Kleppner and Kolenkow, *An Introduction to Mechanics*（力学入門）は、このエネルギーの観点を丁寧に展開している。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。