解答例

STEP III 2022、第 1 問

純粋数学 • 多項式の根

> **STEP III 2022、問 1**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は、OCR が配布している 2022 年の STEP 過去問一式（zip ファイル）のうち、STEP III の問題用紙にある：
>
> www.ocr.org.uk/Images/696587-2022-past-papers.zip

鍵となる考え方

媒介変数表示（parametrisation）を円の方程式に代入すると、「2 つの曲線はどこで交わるか？」という問いは「ある 4 次方程式（quartic）の解は何か？」という問いに変わる。それ以降は、4 次方程式を一度も解くことなく、すべてを解と係数の関係（relationships between roots and coefficients）だけで処理できる。役に立つもう一つの工夫は、逆数（reciprocal）$1/t_i$ が、同じ 4 次方程式の係数を逆順に並べた方程式の解になるという事実である。最後の小問では、「接する」とは重解（repeated root）をもつことを意味する。

解答

小問 (i)

パラメータ t に対応する点が C_2 上にあるための必要十分条件は

$$(ct-a)^2+\left(\frac{c}{t}-b\right)^2=r^2.$$

である。展開すると $c^2t^2-2act+a^2+\dfrac{c^2}{t^2}-\dfrac{2bc}{t}+b^2=r^2$ となる。$t\neq 0$ であるから、解を増やしたり失ったりすることなく両辺に t^2 を掛けることができ、

$$c^2t^4-2act^3+(a^2+b^2-r^2)t^2-2bct+c^2=0.$$

を得る。よって各 t_i は $(*)$ の解である。異なる t の値は異なる点を与える（x 座標 ct が異なる）ので、4 つの点 P_i は 4 つの相異なるパラメータを与える。4 次方程式の解は高々 4 個であるから、$t_1,\ldots,t_4$ はちょうど $(*)$ の解全体である。

小問 (ii)

$(*)$ を c^2 で割ると、解の和および 2 つずつの積の和は

$$\sum t_i = \frac{2a}{c}, \qquad \sum_{i<j} t_i t_j = \frac{a^2+b^2-r^2}{c^2}.$$

である。$(\sum t_i)^2 = \sum t_i^2 + 2\sum_{i<j} t_i t_j$ を用いると、

$$\sum_{i=1}^{4} t_i^2 = \frac{4a^2}{c^2} - \frac{2(a^2+b^2-r^2)}{c^2} = \frac{2}{c^2}(a^2-b^2+r^2),$$

となり、示すべき式が得られる。

考えてみよう 面倒な通分をせずに $\sum 1/t_i^2$ を求めるにはどうすればよいか？

$(*)$ において $u = 1/t$ とおく。0 は解ではない（定数項が $c^2 \neq 0$ である）ので、$(*)$ を t^4 で割ることができ、

$$c^2 - 2acu + (a^2+b^2-r^2)u^2 - 2bcu^3 + c^2u^4 = 0,$$

すなわち $c^2u^4 - 2bcu^3 + (a^2+b^2-r^2)u^2 - 2acu + c^2 = 0$ を得る。この方程式の解は $1/t_i$ である。これは $(*)$ の a と b を入れ替えたものであるから、同じ計算により

$$\sum_{i=1}^{4} \frac{1}{t_i^2} = \frac{2}{c^2}(b^2-a^2+r^2).$$

が得られる。

小問 (iii)

点 P_i は $(ct_i, c/t_i)$ であるから、$OP_i^2 = c^2t_i^2 + \dfrac{c^2}{t_i^2}$ である。和をとり、小問 (ii) の結果を用いると

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{4} OP_i^2 &= c^2\sum t_i^2 + c^2\sum \frac{1}{t_i^2} \\ &= 2(a^2-b^2+r^2) + 2(b^2-a^2+r^2) \\ &= 4r^2,\end{aligned}$$

となり、求める結果が得られる。中心 (a,b) が完全に消えていることに注意しよう。

小問 (iv)

考えてみよう 「接する」とは、$(*)$ の解の言葉でいえばどういうことか？

$f(t) = (ct-a)^2 + (c/t-b)^2 - r^2$ とおく。これは動点と中心との距離の 2 乗から r^2 を引いたものである。曲線がパラメータ t_0 で円に接するのは、$f(t_0) = 0$ かつ $f'(t_0) = 0$ のときである。すなわち、点が円上にあり、かつ 1 次の近似で中心からの距離が変化していないので、そこでの曲線の向きは半径に垂直であり、これは円の接線の向きにほかならない。（ここでは速度ベクトル $(c, -c/t^2)$ が決して零にならないことを用いている。）$(*)$ の 4 次式は $t^2 f(t)$ であり、$t_0 \neq 0$ であるから、f が t_0 を重解にもつことと $(*)$ が t_0 を重解にもつことは同値である。

したがって、C_1 と C_2 が相異なる 2 点（パラメータ $\alpha \neq \beta$）で接するならば、α と β はともに $(*)$ の重解である。これで 4 つの解すべてが尽くされるので、

$$c^2t^4 - 2act^3 + (a^2+b^2-r^2)t^2 - 2bct + c^2 = c^2(t-\alpha)^2(t-\beta)^2.$$

が成り立つ。**解の積**。定数項を比較すると $c^2\alpha^2\beta^2 = c^2$ であるから、$(\alpha\beta)^2 = 1$ すなわち $\alpha\beta = \pm 1$ である。

解の和。t^3 の項を比較すると $2(\alpha+\beta) = \dfrac{2a}{c}$ であるから、$\alpha+\beta = \dfrac{a}{c}$ である。

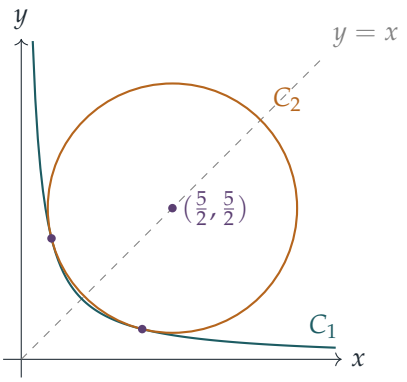
3 つずつの積の和。t の項を比較すると $2\alpha\beta(\alpha+\beta) = \dfrac{2b}{c}$ であるから、$\alpha\beta(\alpha+\beta) = \dfrac{b}{c}$ である。

後の 2 式を割り算する（あるいは 2 番目の式を 3 番目の式に代入する）と $b = \alpha\beta\, a$ を得る。よって

$$\alpha\beta = 1 \implies b = a, \qquad \alpha\beta = -1 \implies b = -a,$$

であり、中心 (a, b) は $y = x$ または $y = -x$ 上にある。（$a = 0$ ならば $b = 0$ でもあり、中心は原点となるが、原点は両方の直線上にある。）

図は $c = 1$、$\alpha = 2$、$\beta = \frac{1}{2}$ の場合を示している。係数を比較すると $a = b = \frac{5}{2}$、$r^2 = \frac{17}{4}$ となり、円は双曲線と $(2, \frac{1}{2})$ および $(\frac{1}{2}, 2)$ で接する。



検算

- 小問 (iii) において、原点を中心とする円 $x^2+y^2=r^2$ をとり、$c=1$、$r^2>2$ とする。対称性から 4 つの点は $(p,q),(q,p),(-p,-q),(-q,-p)$ であり、いずれも原点からの距離は r であるから、総和は確かに $4r^2$ となる。
- 図の例では、$(\frac{5}{2},\frac{5}{2})$ と $(2,\frac{1}{2})$ の距離の 2 乗は $\frac{1}{4}+4=\frac{17}{4}=4.25$ であり、あるべき値になっている。そこでの半径の向き $(-\frac{1}{2},-2)$ は曲線の向き $(1,-\frac{1}{4})$ に垂直であり、接していることが確かめられる。
- 小問 (ii) の公式は、ランダムに選んだ数千個の円について、4 次方程式を数値的に解くことでコンピュータにより確認した。

よくある間違い

- $\sum t_it_j$ の符号を間違える。$t^4+pt^3+qt^2+\dots$ に対して、解の和は $-p$ であるが、2 つずつの積の和は $+q$ である。
- 小問 (iv) で解の積だけを用いる。これからは $\alpha\beta=\pm1$ が得られるが、それだけでは (a,b) について何もわからない。a と b を引き出すには、もう一つ係数の比較が必要である。
- 「接する」ことがなぜ重解を与えるのかを説明しない。その理由は条件 $f(t_0)=f'(t_0)=0$ と $t_0\neq0$ にある。

STEP のその先へ

解と係数の関係に現れるのは基本対称式（elementary symmetric functions）である。古典的な定理によれば、$\sum t_i^2$ や $\sum t_i^{-2}$ のような解の**任意の**対称式（symmetric

polynomial）は係数を用いて表すことができる。$u = 1/t$ という係数の反転の工夫は射影幾何（projective geometry）の考え方の入り口であり、二次曲線（conic）と円が高々 4 点でしか交わらないという事実は、平面曲線の交わりに関するベズー（Bézout）の定理の特別な場合である。多項式とその解についてさらに学ぶには Allenby, *Rings, Fields and Groups*（環・体・群）を、この種の問題の演習には Siklos, *Advanced Problems in Mathematics*（発展的な数学の問題）を参照するとよい。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。