解答例

STEP II 2022、第 9 問

力学 ・ 摩擦とモーメント

> **STEP II 2022、問 9**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は、OCR が配布している 2022 年の STEP 過去問一式（zip ファイル）のうち、STEP II の問題用紙にある：
>
> www.ocr.org.uk/Images/696587-2022-past-papers.zip

鍵となる考え方

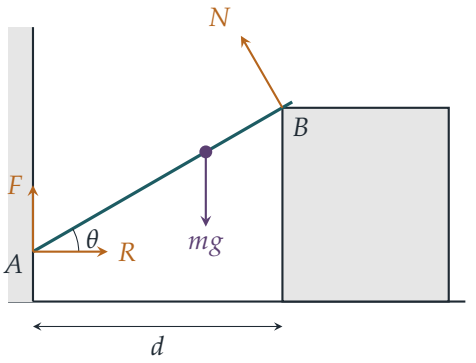
板は軽いので、板に力を及ぼすものは三つしかない。質点（point mass）、三角柱（prism）の辺からの抗力（reaction）、そして壁である。板が壁に接する点のまわりのモーメント（moment）をとると、壁からの二つの力が同時に消え、辺からの抗力がただちに求まる。次に鉛直方向の力のつり合いから摩擦力（friction）が求まり、以降の小問はすべて摩擦の不等式 $|F| \le \mu R$ を変形したものにすぎない。

解答

モデル化。板は軽い剛体の棒、おもりは重さ mg の質点、三角柱の辺はなめらか、壁は摩擦係数（coefficient of friction）μ をもつ粗い面とする。板が壁に接する点を A、板が辺の上に載っている点を B とする。B は壁から水平距離 d の位置にあるので、

$$AB = d\sec\theta.$$

B において板は辺の上に載っているので、なめらかな面からの抗力 N は板に垂直である。A において、壁は水平な垂直抗力 R と鉛直な摩擦力 F を及ぼす。F は上向きを正にとる（F が負であれば下向きにはたらくことを意味する）。



A のまわりのモーメント。壁からの二つの力はどちらも A を通る。重力は板に沿って距離 x の点にはたらくので、その腕の長さは $x\cos\theta$ である。N は距離 $d\sec\theta$ の点で板に垂直にはたらく。したがって

$$N\,d\sec\theta = mg\,x\cos\theta \quad\Longrightarrow\quad N = \frac{mg\,x\cos^2\theta}{d}.$$

力の分解。N の向きは鉛直方向と角 θ をなし、壁の側に傾いている。水平方向と鉛直方向のつり合いから

$$R = N\sin\theta = \frac{mg\,x\cos^2\theta\sin\theta}{d},$$
$$F = mg - N\cos\theta = mg\left(1 - \frac{x\cos^3\theta}{d}\right).$$

$R > 0$ であるから、板は確かに壁を押していることに注意する。

小問 (i)

$x = d\sec^3\theta$ ならば $x\cos^3\theta/d = 1$ であるから $F = 0$ となる。すなわち、壁では摩擦力がはたらかない。

小問 (ii)

摩擦がある場合のつり合い（equilibrium）の条件は $|F| \le \mu R$ である。

$x > d\sec^3\theta$ ならば $x\cos^3\theta/d > 1$ であるから $F < 0$ となる（摩擦力は下向きにはたらく。摩擦がなければ端 A は壁に沿って上に滑ってしまう）。条件 $-F \le \mu R$ は

$$mg\left(\frac{x\cos^3\theta}{d} - 1\right) \le \mu\,\frac{mg\,x\cos^2\theta\sin\theta}{d}.$$

となる。正の量 $d\sec^3\theta/(mg)$ を掛けると

$$x - d\sec^3\theta \le \mu\,x\tan\theta, \qquad \text{よって} \qquad \mu \ge \frac{x - d\sec^3\theta}{x\tan\theta},$$

を得る。ここで $x\tan\theta > 0$ で割った（θ は鋭角である）。これが求める結果である。

$x < d\sec^3\theta$ ならば $F > 0$ であり、条件 $F \le \mu R$ は同様にして

$$\mu \ge \frac{d\sec^3\theta - x}{x\tan\theta}.$$

となる。

考えてみよう 摩擦力はどちら向きにはたらくのか。当て推量に頼らずに、それをどうやって知ればよいだろうか。

推測する必要はない。F を上向きに正とすれば、鉛直方向の式がその符号を教えてくれる。摩擦の条件は常に $|F| \le \mu R$ と書くことができ、F の符号は二つの不等式のどちらが得られるかを決めるだけである。

小問 (iii)

(ii) の二つの場合はどちらも $|x - d\sec^3\theta| \le \mu x\tan\theta$ を意味し、これは次の二つの不等式の組と同値である。

$$x - d\sec^3\theta \le \mu x\tan\theta \qquad \text{かつ} \qquad d\sec^3\theta - x \le \mu x\tan\theta.$$

二つ目から $d\sec^3\theta \le x(1+\mu\tan\theta)$ を得る。$1+\mu\tan\theta > 0$ であるから

$$\frac{x}{d} \ge \frac{\sec^3\theta}{1+\mu\tan\theta}.$$

一つ目から $x(1-\mu\tan\theta) \le d\sec^3\theta$ を得る。$\mu < \cot\theta$ ならば $\mu\tan\theta < 1$ であるから $1-\mu\tan\theta > 0$ となり、不等号の向きを変えずに割ることができる。

$$\frac{x}{d} \le \frac{\sec^3\theta}{1-\mu\tan\theta}.$$

（$\mu \ge \cot\theta$ ならば上限は存在しない。おもりが板のどれほど上にあっても、摩擦力がそれを支えることができる。）

小問 (iv)

おもりが壁と辺の間にあるのは、ちょうど $x < AB = d\sec\theta$ のときである。これを (iii) の下限と組み合わせると

$$\frac{d\sec^3\theta}{1+\mu\tan\theta} \le x < d\sec\theta.$$

$d\sec\theta > 0$ で割り、$1+\mu\tan\theta > 0$ を掛けると

$$\sec^2\theta < 1+\mu\tan\theta \quad\Longleftrightarrow\quad \tan^2\theta < \mu\tan\theta,$$

となる。ここで $\sec^2\theta = 1 + \tan^2\theta$ を用いた。$\tan\theta > 0$ であるからこれで割ることができ、求める $\tan\theta < \mu$ を得る。

検算

- $\theta = 45°$、$d = 1$、$\mu = 0.5$ とする。このとき $\sec^3\theta = 2\sqrt{2} \approx 2.83$ であり、(iii) により $1.89 \le x \le 5.66$ が許される。たとえば $x = 2$ のとき、$F = mg(1 - 2/2\sqrt{2}) \approx 0.29mg$、$N = mg$、$R = mg/\sqrt{2}$ であり $\mu R \approx 0.35mg$ となるので、つり合いは成り立つ。この場合おもりは辺より先にあり（$AB = \sqrt{2}$）、$\tan 45° = 1 > \mu$ であるから (iv) と矛盾しない。
- 極限の場合 $\mu = 0$（なめらかな壁）：(iii) の範囲は $x = d\sec^3\theta$ の一点に縮まり、これは (i) で得た唯一の位置である。
- 多数のランダムな θ、d、μ、x の値についてコンピュータで確かめたところ、力がつり合っていること（他の点のまわりのモーメントも含む）、そして $|F| \le \mu R$ が成り立つのはちょうど (iii) の不等式が成り立つときであることが確認できた。

よくある間違い

- 辺からの抗力を鉛直とみなしてしまう。板は辺の上に載っているので、なめらかな面からの抗力は三角柱の上面ではなく板に垂直である。
- モーメントの式で、距離 AB に $d\sec\theta$ ではなく d を用いてしまう。
- $1 - \mu\tan\theta$ の符号を確かめずに $x(1 - \mu\tan\theta) \le d\sec^3\theta$ を割ってしまう。条件 $\mu < \cot\theta$ が現れるのはこのためである。

STEP のその先へ

この板は**静定**（statically determinate）である。未知の反力が三つ、つり合いの式が三つであるから、摩擦力は正確に決まる。支点をもう一つ加えると、つり合いの式だけでは力が決まらなくなる。そのとき技術者は、はりの弾性（elasticity）を考慮して荷重がどう分担されるかを決める。(iii) の範囲は「つり合いの領域」の小さな例であり、この主題は安定性（stability）の研究で再び現れる。Kleppner と Kolenkow の *An Introduction to Mechanics*（力学入門）は、剛体（rigid body）の静力学と摩擦を丁寧に扱っている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。