解答例

STEP II 2022、第 8 問

純粋数学 ・ 行列の不変直線

> **STEP II 2022、問 8**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は、OCR が配布している 2022 年の STEP 過去問一式（zip ファイル）のうち、STEP II の問題用紙にある：
>
> www.ocr.org.uk/Images/696587-2022-past-papers.zip

鍵となる考え方

原点を通る直線が不変（invariant）であるとは、その直線上のすべての点が同じ直線上の点に移されることであるから、1 つの方向ベクトル（direction vector）の行き先を調べれば十分である。直線を $y = mx$ と書き、$\mathbf{M}\binom{1}{m}$ が $\binom{1}{m}$ の定数倍になることを要求すると、すべてが m の二次方程式（quadratic）に帰着する。その後、小問 (ii) と (iii) はその解の和と積の問題となる。ただし、傾きをもたない鉛直な直線は、毎回別に調べる必要がある。

解答

小問 (i)

方向ベクトル $\binom{1}{m}$ をもつ直線 $y = mx$ を考える。その像は

$$\mathbf{M}\begin{pmatrix}1\\m\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a+bm\\c+dm\end{pmatrix}.$$

である。$\mathbf{M}$ は線形（linear）であるから、この直線が不変であるのは、この像が $y = mx$ 上にあるとき、すなわち

$$c + dm = m(a + bm) \quad \Longleftrightarrow \quad bm^2 + (a-d)m - c = 0.$$

のときであり、かつそのときに限る。したがって、鉛直でない不変直線の傾き（gradient）はすべてこの方程式を満たし、逆にこの方程式の各解は不変直線を与える。

傾きを「その解」と呼ぶ前に、これが本当に二次方程式であることを確かめなければならない。y 軸の方向ベクトルは $\binom{0}{1}$ であり、その像は $\binom{b}{d}$ である。これが y 軸上にあ

るのは $b = 0$ のときであり、かつそのときに限る。よって、どちらの不変直線も y 軸でなければ $b \neq 0$ である。このとき方程式は真に二次方程式であり、解は高々 2 個である。2 本の不変直線はともに鉛直でなく、傾きが異なるので、それらの傾きは相異なる 2 つの解である。したがって、それらはちょうどこの方程式の 2 つの解であり、これが示すべきことであった。

一方の不変直線が y 軸であるならば、$b = 0$ であり、方程式は $(a-d)m - c = 0$ に退化する。$a \neq d$ であるから（この条件はここで使われる）、もう一方の不変直線の傾きは

$$m = \frac{c}{a-d}.$$

である。

小問 (ii)

$b \neq 0$ の場合。 傾きを m_1, m_2 とする。小問 (i) より

$$m_1 + m_2 = -\frac{a-d}{b}, \qquad m_1 m_2 = -\frac{c}{b}.$$

である。2 直線が x 軸となす角をそれぞれ α_1, α_2 とすると

$$\tan(\alpha_1 - \alpha_2) = \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}.$$

である。2 直線のなす角が 45° であることは、これが ± 1 に等しいことを意味するので、$(m_1 - m_2)^2 = (1 + m_1 m_2)^2$ である。左辺を $(m_1 + m_2)^2 - 4m_1 m_2$ と書き直すと

$$\frac{(a-d)^2}{b^2} + \frac{4c}{b} = \left(1 - \frac{c}{b}\right)^2.$$

を得る。両辺に b^2 を掛けると $(a-d)^2 + 4bc = (b-c)^2$、すなわち

$$(a-d)^2 = (b-c)^2 - 4bc.$$

となる。

$b = 0$ の場合。 一方の直線は y 軸であり、もう一方の傾きは $c/(a-d)$ である。この直線が y 軸と 45° の角をなすためには傾きが ± 1 でなければならないので、$c = \pm(a-d)$ であり、$(a-d)^2 = c^2$ となる。$b = 0$ のとき、示すべき式の右辺も c^2 であるから、この場合も結果は成り立つ。

小問 (iii)

考えてみよう 「$y = x$ と等しい角をなす」とは、傾きの言葉でいうとどういうことか。

原点を通る相異なる 2 直線が $y = x$ と同じ角をなすのは、一方が他方の $y = x$ に関する鏡像（mirror image）であるときであり、かつそのときに限る。$y = x$ に関する鏡映は座標を入れ替えるので、$y = mx$ を $x = my$ に移す。これは $m \neq 0$ のとき $y = \frac{1}{m}x$ である。また、x 軸を y 軸に、y 軸を x 軸に移す。

$b \neq 0$ の場合。 どちらの直線も鉛直ではない。もし一方の傾きが 0 であれば、その鏡像は y 軸となるが、y 軸は不変ではないので、2 直線は対称にならない。そうでなければ、条件は $m_2 = 1/m_1$、すなわち $m_1 m_2 = 1$ である。小問 (i) より、これは $-c/b = 1$、すなわち $b + c = 0$ である。

$b = 0$ の場合。 一方の直線は y 軸であるから、もう一方は x 軸でなければならない。すなわち $c/(a - d) = 0$、つまり $c = 0$ である。$b = 0$ のもとでは、これもまた条件 $b + c = 0$ である。

以上より、いずれの場合も必要十分条件は

$$b + c = 0, \quad \text{すなわち} \quad c = -b.$$

である。（行列が対称で $b = c$ のときは、不変直線は代わりに直交する。ここでは非対角成分（off-diagonal entries）が互いに符号が逆になっている。）

小問 (iv)

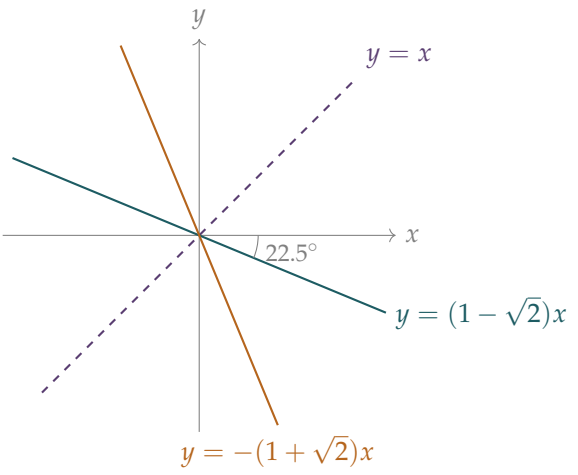
小問 (ii) の条件に $c = -b$ を代入すると

$$(a - d)^2 = (2b)^2 + 4b^2 = 8b^2.$$

となる。$b \neq 0$ でなければならない。実際、$b = c = 0$ ならば $(a - d)^2 = 0$ となり、$a \neq d$ に矛盾する。$b = 1, c = -1, a - d = 2\sqrt{2}$ とし、例えば $a = \sqrt{2}, d = -\sqrt{2}$ とすると

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 1 \\ -1 & -\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

を得る。小問 (i) の二次方程式は $m^2 + 2\sqrt{2}\,m + 1 = 0$ であり、相異なる実数解 $m = -\sqrt{2} \pm 1$ をもつ。よって、この行列は問題の仮定どおり、ちょうど 2 本の不変直線をもつ。それらの傾きの積は 1 であるから、2 直線は $y = x$ に関して互いに鏡像である。$\tan 22.5^\circ = \sqrt{2} - 1, \tan 67.5^\circ = \sqrt{2} + 1$ であるから、2 直線が x 軸となす角は -22.5° と -67.5° である。したがって、2 直線は 45° で交わり、それぞれ $y = x$ と 67.5° の角をなす。



検算

- 小問 (iv) の例では、$(a-d)^2 = 8$ かつ $(b-c)^2 - 4bc = 4+4 = 8$ であるから、小問 (ii) の条件は成り立っている。1 本の直線を直接確かめることもできる。$\mathbf{M}\begin{pmatrix}1\\1-\sqrt{2}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\sqrt{2}+1-\sqrt{2}\\-1-\sqrt{2}+2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1-\sqrt{2}\end{pmatrix}$ であるから、実は $y = (1-\sqrt{2})x$ 上のすべての点は動かない。
- 小問 (i) の簡単な特殊例：$\mathbf{M} = \begin{pmatrix}2 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}$ のとき、不変直線は座標軸である。y 軸の場合の公式からもう一方の傾きは $0/(2-1) = 0$ となり、正しい。
- 小問 (i)–(iii) は、数千個のランダムな行列についてコンピュータで確認した。固有ベクトルの方向は二次方程式を満たし、45° をなす組は恒等式を満たし、直線が $y = x$ に関して対称になるのはちょうど $b + c = 0$ のときである。

よくある間違い

- 鉛直な直線を忘れること。二次方程式は傾きしか捉えないので、$b = 0$ の場合はどの小問でも別に扱わなければならない。
- 小問 (iii) で $m_1 = -m_2$ と書くこと。これは**座標軸**に関する対称性である。$y = x$ に関する対称性には $m_1 m_2 = 1$ が必要である。
- $\pm$ をつけずに $\tan\theta = 1$ を用いること。$(m_1 - m_2)^2 = (1 + m_1 m_2)^2$ と 2 乗すれば、両方の符号を一度に扱える。

STEP のその先へ

原点を通る不変直線は $\mathbf{M}$ の**固有ベクトル**（eigenvector）の方向であり、小問 (i) の二次方程式は、固有ベクトルの方程式 $\mathbf{Mv} = \lambda\mathbf{v}$ から λ を消去したものである。実対称行列（real symmetric matrix）は常に直交する固有ベクトルをもつ（スペクトル定理（spectral theorem））。この問題は、非対角成分が反対称（antisymmetric）であると、固有ベクトルが代わりに $y = x$ に関して対称になることを示している。ストラング（Strang）の *Introduction to Linear Algebra*（線形代数入門）では、固有ベクトルとスペクトル定理が展開されている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。