解答例

STEP II 2022、第 7 問

純粋数学 • 複素多項式の根

> **STEP II 2022、問 7**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は、OCR が配布している 2022 年の STEP 過去問一式（zip ファイル）のうち、STEP II の問題用紙にある：
>
> www.ocr.org.uk/Images/696587-2022-past-papers.zip

鍵となる考え方

方程式 $\mathrm{h}(w) = 0$ は自然に $w^5(nw+1) = -(w+n)$ と分けられ、両辺の絶対値（modulus）をとれば $|w|$ だけについての主張に帰着する。すべての根が単位円（unit circle）上にあることがわかれば、実数でない各根は、その複素共役（complex conjugate）と組になり、しかもその共役は逆数（reciprocal）でもある。これにより二次の因数が得られ、あとは係数比較（comparing coefficients）と符号の議論をするだけである。

解答

小問 (i)

(a) $\mathrm{h}(w) = 0$ の項を次のようにまとめる。

$$w^5(nw+1) = -(w+n).$$

どちらの括弧も 0 にはならない。実際、$w = -1/n$ ならば $\mathrm{h}(w) = n - \frac{1}{n} \neq 0$ であり、$w = -n$ ならば $\mathrm{h}(w) = n^5(n^2-1) \neq 0$ である。ここで $n \geq 2$ を用いた。両辺の絶対値をとって 2 乗すると、

$$|w^5|^2\,|nw+1|^2 = |w+n|^2.$$

任意の複素数 u と実数 c に対して $|u+c|^2 = (u+c)(\bar{u}+c) = |u|^2 + 2c\,\mathrm{Re}(u) + c^2$ が成り立つ。よって

$$|w+n|^2 = |w|^2 + 2n\,\mathrm{Re}(w) + n^2 = \mathrm{f}(w),$$
$$|nw+1|^2 = n^2|w|^2 + 2n\,\mathrm{Re}(w) + 1 = \mathrm{g}(w).$$

どちらも正であるから、$|w^5|^2 = \mathrm{f}(w)/\mathrm{g}(w)$ である。正の平方根をとれば $|w^5| = \sqrt{\mathrm{f}(w)/\mathrm{g}(w)}$ となり、示すべきことが得られた。

(b) 差をとると $\mathrm{Re}(w)$ の項は打ち消し合う。

$$\mathrm{f}(w) - \mathrm{g}(w) = n^2 + |w|^2 - n^2|w|^2 - 1 = (n^2-1)(1-|w|^2).$$

背理法（proof by contradiction）により、$|w| < 1$ と仮定する。$n^2 - 1 > 0$ であるから $\mathrm{f}(w) > \mathrm{g}(w) > 0$ となり、$\mathrm{f}(w)/\mathrm{g}(w) > 1$ である。(a) より $|w|^5 > 1$ であるから $|w| > 1$ となり、これは $|w| < 1$ に矛盾する。したがって $|w| \geq 1$ である。

(c) 同じ議論を逆向きに用いればよい。$|w| > 1$ ならば $\mathrm{f}(w) < \mathrm{g}(w)$ であるから $|w|^5 < 1$、すなわち $|w| < 1$ となり矛盾する。よって $|w| \leq 1$ も成り立ち、(b) と合わせて $|w| = 1$ である。

> **考えてみよう** $|w| \leq 1$ となることについて、もっと鮮やかな理由はないだろうか？

ある。係数 $n, 1, 0, 0, 0, 1, n$ は逆から読んでも同じであるから、$z^6\,\mathrm{h}(1/z) = \mathrm{h}(z)$ が成り立つ。したがって w が根ならば $1/w$ も根であり、$1/w$ に (b) を適用すれば $|w| \leq 1$ が得られる。

小問 (ii)

(a) h は実数係数であるから、実数でない根は共役な組で現れる。6 つの根は相異なり、いずれも実数でないので、3 つの組 w_k, $\bar{w}_k$ $(k = 1, 2, 3)$ をなす。小問 (i) より $|w_k| = 1$ であるから $w_k\bar{w}_k = 1$ であり、

$$(z - w_k)(z - \bar{w}_k) = z^2 - (w_k + \bar{w}_k)z + w_k\bar{w}_k = z^2 - a_k z + 1,$$

となる。ここで $a_k = 2\,\mathrm{Re}(w_k)$ は実数である。多項式 h は 6 次で最高次の係数は n であるから、

$$\mathrm{h}(z) = n(z^2 - a_1 z + 1)(z^2 - a_2 z + 1)(z^2 - a_3 z + 1).$$

(b) 積における z^5 の項は、1 つの因数から $-a_k z$ を、残り 2 つの因数から z^2 をとることで現れる。よって z^5 の係数は $-n(a_1 + a_2 + a_3)$ である。h におけるこの係数は 1 であるから、

$$a_1 + a_2 + a_3 = -\frac{1}{n}.$$

(c) まず 2 つの因数を掛ける。

$$(z^2 - a_1 z + 1)(z^2 - a_2 z + 1) = z^4 - (a_1 + a_2)z^3 + (2 + a_1 a_2)z^2 - (a_1 + a_2)z + 1.$$

これに $z^2 - a_3 z + 1$ を掛けると、z^3 の項は $z^3 \times 1$、$z^2 \times (-a_3 z)$、$z \times z^2$ から生じる。

$$-(a_1 + a_2) - a_3(2 + a_1 a_2) - (a_1 + a_2) = -2(a_1 + a_2 + a_3) - a_1 a_2 a_3.$$

h には z^3 の項がないので $a_1 a_2 a_3 = -2(a_1 + a_2 + a_3)$ であり、(b) より

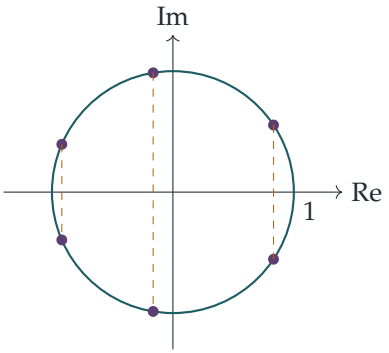
$$a_1 a_2 a_3 = \frac{2}{n}.$$

(d)

考えてみよう a_k の符号から、実部について何がわかるだろうか？

共役な組 $w_k, \bar{w}_k$ はそれぞれ同じ実部 $\mathrm{Re}(w_k) = a_k/2$ をもつ。よって実部が負である根の個数は、負である a_k の個数の 2 倍である。

$a_1 a_2 a_3 = 2/n > 0$ であるから、どの a_k も 0 ではなく、負であるものの個数は偶数、すなわち 0 個か 2 個である。$a_1 + a_2 + a_3 = -1/n < 0$ であるから、すべてが正であることはありえない。よって a_k のうちちょうど 2 つが負で 1 つが正であり、6 つの根のうち **4 つ**が負の実部をもつ。



図は $n = 2$ の場合を示している。6 つの根は 3 組の共役な組として単位円上にあり、そのうち 2 組は虚軸の左側にある。

検算

- 実数の根がないことの確認として、$\mathrm{h}(1) = 2n + 2$ と $\mathrm{h}(-1) = 2n - 2$ がどちらも 0 でないことに注意する。根は単位円上にあるので、実数の根の候補は ± 1 だけである。
- $n = 2$ のとき、数値的に解くと $a_k \approx -1.8368, -0.3272, 1.6640$ となる。これらの和は $-0.5 = -\frac{1}{2}$、積は $1.000 = \frac{2}{2}$ であり、2 つが負であるから、(b)、(c)、(d) と一致

する。コンピュータで $n = 2, \ldots, 29$ を調べたところ、いずれの場合もすべての根の絶対値は 1 であり、4 つの根が負の実部をもつことが確かめられた。

よくある間違い

- $w = -1/n$ が根でないことを確かめずに $nw + 1$ で割ってしまう。
- (c) で z^3 を作る 3 通りの方法のうち 1 つを見落とす。特に、$2 + a_1 a_2$ の定数 2 から生じる項 $-2a_3$ を落としやすい。
- (d) で負の a_k の個数を数えたものの、それぞれが 2 つの根に対応することを忘れる。

STEP のその先へ

係数を逆から読んでも同じになる多項式を**回文多項式**（palindromic polynomial）、または自己相反多項式（self-reciprocal polynomial）という。その根は $w, 1/w$ の組で現れ、置換 $u = z + 1/z$ によって次数を半分にできる。ここでの $a_k = w_k + 1/w_k$ はまさにこの u である。すべての根が単位円上にあるのはどのようなときかという問いは、シューア・コーン判定法（Schur–Cohn test）のような結果や、複素解析（complex analysis）におけるルーシェの定理（Rouché's theorem）へとつながっていく。Needham の *Visual Complex Analysis*（『ヴィジュアル複素解析』）は、これらの考え方を幾何学的に見るのにうってつけの美しい本である。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。