解答例

# STEP II 2022、第 6 問

純粋数学 • 直交軌道

> **STEP II 2022、問 6**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は、OCR が配布している 2022 年の STEP 過去問一式（zip ファイル）のうち、STEP II の問題用紙にある：
>
> www.ocr.org.uk/Images/696587-2022-past-papers.zip

## 鍵となる考え方

2 つの曲線がある点で直角に交わる（meet at right angles）のは、その点での傾き（gradient）の積が $-1$ になるときであり、またそのときに限る。したがって曲線族（family of curves）全体について、点 $(x, y)$ を通る曲線が族の**どの**曲線であっても成り立つような傾きの式が欲しい。そのためには、曲線の方程式とその導関数からパラメータ（parameter）（$a, b, c$ または $k$）を消去し、$x, y, \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ だけからなる微分方程式（differential equation）を得ればよい。そうすれば、傾き $m$ を $-1/m$ に置き換えて解くことで、直交する曲線族が求まる。

## 解答

以下つねに $x > 0$ かつ $y > 0$ とする。

### 小問 (i)(a)

$x^2 + y^2 = 2ax$ を $x$ について陰関数微分（implicit differentiation）すると

$$2x + 2y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 2a.$$

この式にはまだ $a$ が含まれており、$a$ は曲線ごとに異なる。曲線の方程式から $2a = (x^2 + y^2)/x$ であるから、これを代入して $x$ を掛けると

$$2x^2 + 2xy\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = x^2 + y^2 \quad \Longrightarrow \quad 2xy\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = y^2 - x^2,$$

となり、求める式が得られる。

2 つ目の族については、$x^2+y^2=2by$ を微分すると（右辺も $y$ を通して $x$ に依存することに注意して）

$$2x+2y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=2b\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}.$$

ここで $2b=(x^2+y^2)/y$ であるから、これを代入して $y$ を掛けると

$$2xy+2y^2\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=(x^2+y^2)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\quad\Longrightarrow\quad(x^2-y^2)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=2xy.$$

**小問 (i)(b)**

各族の曲線が 1 本ずつ点 $(x,y)$ を通り、$y\neq x$ であるとする。$x,y>0$ より $2xy\neq 0$ であり、また $y\neq x$ かつ両者とも正であるから $x^2-y^2\neq 0$ である。よって 2 つの微分方程式はどちらも割り算ができ、2 つの傾きは

$$m_1=\frac{y^2-x^2}{2xy},\qquad m_2=\frac{2xy}{x^2-y^2},\qquad\text{したがって}\qquad m_1m_2=\frac{y^2-x^2}{x^2-y^2}=-1.$$

となる。どちらの傾きも有限で、その積は $-1$ であるから、2 本の接線（tangent）は垂直である。

**考えてみよう** 直線 $y=x$ 上では何がうまくいかないか。また、それはそこで結果が成り立たないことを意味するのか。

$y=x$ 上では 2 つ目の式は $0\cdot\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=2x^2\neq 0$ となり、これを満たす有限の傾きは存在しない。つまり 2 つ目の曲線の接線は鉛直である。これで崩れるのは代数的な計算であって幾何ではないから、直接調べてみよう。

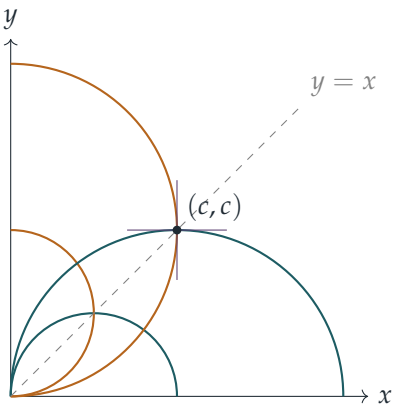
$(c,c)$ が $x^2+y^2=2ax$ 上にあれば $2c^2=2ac$ より $a=c$ であり、同様に $b=c$ である。1 つ目の曲線は中心 $(c,0)$、半径 $c$ の円で、$(c,c)$ はその最高点であるから、そこでの接線は水平である（実際、$y=x$ のとき $m_1=0$ である）：

$$y=c.$$

2 つ目の曲線は中心 $(0,c)$、半径 $c$ の円で、$(c,c)$ はその最も右の点であるから、接線は鉛直である：

$$x=c.$$

水平な直線と鉛直な直線は垂直であるから、答えは**イエス**である。$y=x$ 上の点も含め、すべての交点で接線は垂直である。




1 つ目の族の円（青緑）は原点で $y$ 軸に接し、2 つ目の族の円（琥珀色）は原点で $x$ 軸に接する。

**小問 (ii)**

$y = c\ln x$ について $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{c}{x}$ である。$c$ を消去するために、このような曲線上の第 1 象限（first quadrant）の点では $y > 0$ から $\ln x \neq 0$ となることに注意すると、$c = y/\ln x$ であり

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{y}{x\ln x}.$$

この傾きは決して 0 にならないから、同じ点を通る垂直な曲線の傾きは $-x\ln x/y$ でなければならない。したがって 2 つ目の族は

$$y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -x\ln x.$$

を満たす。変数分離（separation of variables）を行い、$x\ln x$ を $u = \ln x, \mathrm{d}v = x\,\mathrm{d}x$ として部分積分（integration by parts）すると

$$\int y\,\mathrm{d}y = -\int x\ln x\,\mathrm{d}x \quad\Longrightarrow\quad \tfrac{1}{2}y^2 = -\tfrac{1}{2}x^2\ln x + \tfrac{1}{4}x^2 + C.$$

両辺に 4 を掛けると、2 つ目の族は

$$2y^2 + 2x^2\ln x - x^2 = k,$$

であり、定数 $k$ ごとに 1 本の曲線が対応する（$x > 0, y > 0$ の部分のみを考える）。逆に、この式を陰関数微分すると $4y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + 4x\ln x + 2x - 2x = 0$ となり、これはちょうど上の方程式である。よって、これらの曲線のいずれかがある $y = c\ln x$ と交わる点では、傾きの積は $\frac{y}{x\ln x}\cdot\frac{-x\ln x}{y} = -1$ となる。

**小問 (iii)**

$y^2 = 4k(x+k)$ を微分すると $2y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 4k$ であるから、$y > 0$ より

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{2k}{y}.$$

**考えてみよう** ここでは曲線族は 1 つしかない。「2 つ目の曲線」はどこから来るのか。

第 1 象限の点 $(x, y)$ を固定し、族のどの曲線がその点を通るかを考える。$k$ の値は

$$4k^2 + 4xk - y^2 = 0,$$

を満たさなければならない。これは $k$ の 2 次方程式である。その判別式（discriminant）$16x^2 + 16y^2$ は正であるから、相異なる 2 つの実数解 $k_1, k_2$ が存在し、その積は

$$k_1 k_2 = -\frac{y^2}{4}.$$

である（これは負であるから、族の条件どおり、どちらの解も 0 ではない）。2 次方程式の解は高々 2 つであるから、族の相異なる 2 本の曲線が $(x, y)$ で交わるならば、それらのパラメータはちょうど $k_1$ と $k_2$ でなければならない。その点での傾きは $2k_1/y$ と $2k_2/y$ であり、その積は

$$\frac{4k_1k_2}{y^2} = \frac{4}{y^2} \cdot \left(-\frac{y^2}{4}\right) = -1.$$

となる。よって、そのようなすべての点で接線は垂直であり、題意は示された。（これらの曲線は原点を焦点（focus）とする放物線（parabola）であり、この族は自分自身の直交軌道の族になっている。）

## 検算

- (i) で $(x, y) = (1, 2)$ をとると、$a = \frac{5}{2}, b = \frac{5}{4}$ であり、傾きは $m_1 = \frac{3}{4}$ と $m_2 = -\frac{4}{3}$ で、その積は $-1$ である。
- (ii) で点 $(e, 1)$ では、対数曲線は $c = 1$ で傾きは $1/e$ である。2 つ目の族の式からは傾き $-e \cdot 1/1 = -e$ が得られる。やはり積は $-1$ である。
- (iii) で点 $(0, 2)$ では 2 次方程式は $4k^2 - 4 = 0$ となるから $k = \pm 1$ であり、放物線 $y^2 = 4(x+1)$ と $y^2 = -4(x-1)$ が得られ、そこでの傾きは 1 と $-1$ である。
- 4 つの結果はすべて、曲線そのものの数値微分を用いて、数千個のランダムな点でコンピュータによっても確認した。

## よくある間違い

- $2by$ を微分するときに、右辺の因子 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ を書き忘れる。
- (ii) で垂直な傾きを $-x/c$ と書き、$c$ を残したまま積分してしまう。$c$ は 1 つ目の曲線に属するパラメータであるから、解く前に消去しなければならない。
- (i)(b) で $x^2 - y^2$ が 0 でない理由を述べずに割り算をしてしまい、その結果、直線 $y = x$ を別に扱う必要があることを見落とす。

## STEP のその先へ

至るところで直角に交わる曲線族は**直交軌道**（orthogonal trajectories）とよばれる。これは物理学では力線（field lines）と等ポテンシャル線（equipotentials）として現れ、また複素解析（complex analysis）にも現れる。解析関数（analytic function）の実部と虚部の等高線（level curves）はつねに垂直に交わる。(i) の円が $1/z$ から、(iii) の自己直交な放物線が $\sqrt{z}$ から生じるのはこのためである。Boyce と DiPrima の *Elementary Differential Equations*（微分方程式の入門書）は直交軌道を扱っており、Needham の *Visual Complex Analysis*（図で見る複素解析）は複素解析の観点からの描像を見事に説明している。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。