解答例

STEP II 2022、第 5 問

純粋数学 ・ 三角形における不等式

> **STEP II 2022、問 5**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は、OCR が配布している 2022 年の STEP 過去問一式（zip ファイル）のうち、STEP II の問題用紙にある：
>
> www.ocr.org.uk/Images/696587-2022-past-papers.zip

鍵となる考え方

P から三角形を 3 つに分割すると、P がどこに動いても重み付き和 $ax + by + cz$ は常に 2Δ に等しいことがわかる。以降の各小問は、このただ 1 つの線形制約（linear constraint）のもとでの最適化（optimisation）問題となる。小問 (i) は $x + y + z$ をこの一定の量と比較するものであり、(iii)(a) の恒等式（identity）は $x^2 + y^2 + z^2$ について同じことを行う（これは姿を変えたコーシー・シュワルツの不等式（Cauchy–Schwarz inequality）である）。そして最大値については、c を a の代わりに用いて (i) を逆向きに使う。

解答

小問 (i)

$a > b$ かつ $y \geq 0$ より $by \leq ay$ であり、$a > c$ かつ $z \geq 0$ より $cz \leq az$ である。これらを辺々加え、両辺に ax を加えると

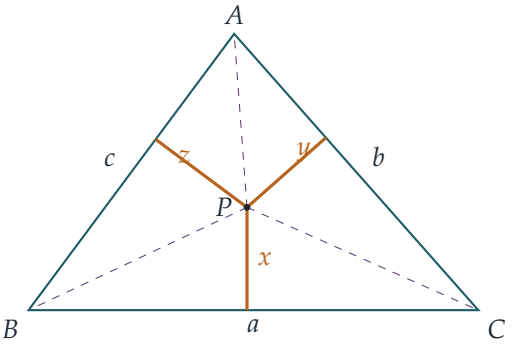
$$ax + by + cz \leq ax + ay + az = a(x + y + z),$$

となり、示すべき不等式が得られる。$a - b > 0$ かつ $a - c > 0$ であるから、等号が成り立つのは $(a - b)y + (a - c)z = 0$ のとき、すなわち $y = z = 0$ のときに限る。この等号成立条件は後で必要になる。

小問 (ii)(a)

P と各頂点を結ぶと、ABC は三角形 PBC、PCA、PAB に分割される（P が辺上にある場合、そのうちいくつかは退化する）。三角形 PBC は底辺 $BC = a$、高さ x をもち、他も同様であるから、

$$\Delta = \tfrac{1}{2}ax + \tfrac{1}{2}by + \tfrac{1}{2}cz, \qquad \text{すなわち} \qquad ax + by + cz = 2\Delta.$$



逆に、$ax + by + cz = 2\Delta$ を満たす任意の $x, y, z \geq 0$ は、三角形の内部（または辺上）のただ1つの点 P からの距離となる。実際、3つの三角形の面積 $\frac{1}{2}ax$、$\frac{1}{2}by$、$\frac{1}{2}cz$ は非負で和が Δ となり、これらによって P が定まる（これらは P の面積座標（areal coordinates）である）。したがって以下では、この問題を純粋に代数的な問題として扱ってよい。すなわち、$ax + by + cz = 2\Delta$ を満たすすべての非負の x, y, z にわたって最適化すればよい。

小問 (ii)(b)

小問 (i) と (ii)(a) により、

$$x + y + z \geq \frac{ax + by + cz}{a} = \frac{2\Delta}{a}.$$

等号が成り立つのは $y = z = 0$ のときに限り、このとき $ax = 2\Delta$ である。よって和の最小値は

$$x + y + z = \frac{2\Delta}{a}, \qquad \text{このとき} \quad x = \frac{2\Delta}{a},\ y = 0,\ z = 0.$$

幾何的には、$y = z = 0$ は P が CA 上と AB 上の両方にあることを意味するので $P = A$ であり、x は A から最長の辺 BC への高さである。

小問 (iii)(a)

3 つの差の平方を展開すると

$$(bx-ay)^2+(cy-bz)^2+(az-cx)^2=b^2x^2+a^2y^2+c^2y^2+b^2z^2+a^2z^2+c^2x^2 \\ -2(abxy+bcyz+cazx),$$

であり、一方

$$(ax+by+cz)^2=a^2x^2+b^2y^2+c^2z^2+2(abxy+bcyz+cazx).$$

これらを加えると交差項は打ち消し合い、a^2,b^2,c^2 のいずれか 1 つと x^2,y^2,z^2 のいずれか 1 つとの積がちょうど 1 回ずつ現れるので、$(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2)$ が得られる。これですべての実数値について恒等式が証明された。

小問 (iii)(b)

恒等式に $ax+by+cz=2\Delta$ を代入すると

$$(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2)=(bx-ay)^2+(cy-bz)^2+(az-cx)^2+4\Delta^2\geq 4\Delta^2,$$

となる。平方は非負だからである。したがって

$$x^2+y^2+z^2\geq\frac{4\Delta^2}{a^2+b^2+c^2}.$$

考えてみよう 下界が最小値となるのは、それが実際に達成される場合に限る。3 つの平方が、実在する点 P において同時に 0 になりうるだろうか？

等号成立には $bx=ay$、$cy=bz$、$az=cx$ が必要である。これらは (x,y,z) が (a,b,c) の定数倍であることを意味する。実際、$x=\lambda a$ とすれば $y=\frac{b}{a}x=\lambda b$、$z=\frac{c}{a}x=\lambda c$ となり、3 つの式はすべて成り立つ。制約条件から $\lambda(a^2+b^2+c^2)=2\Delta$ となるので、$\lambda=\dfrac{2\Delta}{a^2+b^2+c^2}>0$ である。このとき x,y,z はすべて正で $ax+by+cz=2\Delta$ を満たすから、(ii)(a) の注意により、これらは実在する点 P（三角形の真に内部の点）に対応する。よって平方和の最小値は

$$\frac{4\Delta^2}{a^2+b^2+c^2},\qquad \text{このとき}\quad x=\frac{2a\Delta}{a^2+b^2+c^2},\ y=\frac{2b\Delta}{a^2+b^2+c^2},\ z=\frac{2c\Delta}{a^2+b^2+c^2}.$$

小問 (iv)

考えてみよう 小問 (i) では a が最長の辺であることを用いた。代わりに最短の辺 c を用いるとどうなるだろうか？

$a > c$、$b > c$ かつ $x, y \geq 0$ であるから、小問 (i) の議論を逆向きにすると $ax + by + cz \geq c(x + y + z)$ が得られ、等号が成り立つのは $x = y = 0$ のときに限る。よって

$$x + y + z \leq \frac{2\Delta}{c}.$$

また、$x, y, z \geq 0$ であるから

$$x^2 + y^2 + z^2 = (x + y + z)^2 - 2(xy + yz + zx) \leq (x + y + z)^2,$$

であり、等号が成り立つのは $xy + yz + zx = 0$ のときに限る。これらを合わせると（両辺とも非負なので 2 乗してよい）

$$x^2 + y^2 + z^2 \leq (x + y + z)^2 \leq \frac{4\Delta^2}{c^2}.$$

$x = y = 0$ のとき両方の不等式で等号が成り立つ。このとき $xy + yz + zx = 0$ かつ $cz = 2\Delta$ となるからである。よって平方和の最大値は

$$\frac{4\Delta^2}{c^2}, \qquad \text{このとき} \quad x = 0,\ y = 0,\ z = \frac{2\Delta}{c},$$

であり、これは最短の辺に向かい合う頂点 $P = C$ である。（2 番目の不等式で等号が成り立つのは $x = y = 0$ のときに限るので、最大値をとる点はこの点だけである。）

検算

辺が $a = 7$、$b = 6$、$c = 5$ の鋭角三角形をとる。ヘロンの公式（Heron's formula）により $\Delta = \sqrt{9 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 6\sqrt{6} \approx 14.70$ である。このとき答えは次のようになる。$x + y + z$ の最小値は $12\sqrt{6}/7 \approx 4.20$、$x^2 + y^2 + z^2$ の最小値は $864/110 = 432/55 \approx 7.85$、最大値は $864/25 = 34.56$ である。大小関係は妥当である。$P = C$ において平方和は単に C からの高さの 2 乗 $(12\sqrt{6}/5)^2 = 34.56$ となる。多数のランダムな鋭角三角形のそれぞれについて数千個のランダムな点 P をとってコンピュータで確認したところ、$ax + by + cz = 2\Delta$ と 3 つの評価がすべて成り立ち、極値はそれぞれ A、距離が (a, b, c) に比例する点、C で達成されることが確かめられた。

よくある間違い

- 下界を示しただけで、それが達成されることを示さない。(iii)(b) では、等号成立点の距離が非負で制約条件を満たし、実在する P であることを確認しなければな

らない。

- 頂点を取り違える。$x+y+z$ の最小値は A（最長の辺に向かい合う頂点）でとるが、$x^2+y^2+z^2$ の最大値は C（最短の辺に向かい合う頂点）でとる。
- (iv) で条件 $x,y,z \geq 0$ を落とす。この条件がなければ $x^2+y^2+z^2 \leq (x+y+z)^2$ は成り立たない。

STEP のその先へ

(iii)(a) の恒等式はラグランジュ（Lagrange）の恒等式であり、3 次元におけるコーシー・シュワルツの不等式 $(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v})^2 \leq |\mathbf{u}|^2|\mathbf{v}|^2$ を証明するものである。最小値をとる点は (x,y,z) が (a,b,c) に平行となる点、すなわち原点から平面 $ax+by+cz=2\Delta$ に下ろした垂線の足である。$x^2+y^2+z^2$ のような凸関数（convex function）の三角形上での最大値は常に頂点でとられる。これは線形最適化と凸最適化への最初の入り口である。(iii)(b) で求めた点は三角形の類似重心（symmedian point、ルモワーヌ点（Lemoine point）とも呼ばれる）である。内積と射影についてさらに学ぶには、Strang, *Introduction to Linear Algebra*（線形代数入門）を参照のこと。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。