解答例

STEP II 2022、第 4 問

純粋数学 • 絶対値関数

> **STEP II 2022、問 4**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は、OCR が配布している 2022 年の STEP 過去問一式（zip ファイル）のうち、STEP II の問題用紙にある：
>
> www.ocr.org.uk/Images/696587-2022-past-papers.zip

鍵となる考え方

絶対値記号が意味をもつのは、その中身の符号が変わる点だけである。したがって、そのような点で区切られた各区間では、どの絶対値もその中身に正負の符号をつけたものに置き換えられる。逆向きに考えると、項 $A|x-p|$ は $x=p$ に角（かど）をつくり、そこで傾きが $2A$ だけ跳ぶ。そこで一つの式をつくるには、傾きの跳び（最後の小問では x^2 の係数の跳びも）を合わせ、最後に定数を調整すればよい。

解答

小問 (i)

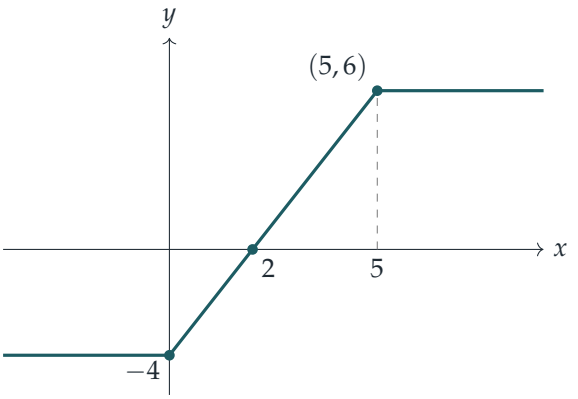
境目となる点は $x=0$（$|x|$ が切り替わる点）と $x=5$（$|x-5|$ が切り替わる点）である。

- $x \le 0$ のとき：$|x| = -x$ であり、$x-5<0$ より $|x-5| = 5-x$ である。よって $\mathrm{f}(x) = -x-(5-x)+1 = -4$ となる。
- $0 \le x \le 5$ のとき：$|x| = x$、$|x-5| = 5-x$ である。よって $\mathrm{f}(x) = x-(5-x)+1 = 2x-4$ となる。
- $x \ge 5$ のとき：$|x| = x$、$|x-5| = x-5$ である。よって $\mathrm{f}(x) = x-(x-5)+1 = 6$ となる。

$x=0$ と $x=5$ では、隣り合う二つの式がともに成り立つ（各絶対値はそこで 0 になるか、符号が定まっている）ので、重なる端点での値は矛盾しない。実際、$-4 = 2(0)-4$、$2(5)-4 = 6$ である。これが求める区分的な表示（piecewise form）である。

グラフは高さ -4 の水平線から始まり、$(0,-4)$ から $(2,0)$ を通って $(5,6)$ まで傾き 2

で上昇し、その後は高さ 6 の水平線となる。



小問 (ii)

小問 (i) を参考に、次の形を試す。

$$\mathrm{g}(x) = A|x| + B|x-5| + Cx + D.$$

左から右へ $x = 0$ を通過するとき、項 $A|x|$ は $-Ax$ から Ax に変わるので、傾きは $2A$ だけ跳ぶ。同様に、$B|x-5|$ は $x = 5$ で傾きを $2B$ だけ跳ばせる。与えられた g の三つの部分の傾きは -1、3、1 であるから

$$2A = 3 - (-1) = 4, \qquad 2B = 1 - 3 = -2,$$

となり、$A = 2$、$B = -1$ を得る。$x \geq 5$ では式は $2x - (x-5) + Cx + D = (1+C)x + 5 + D$ となり、これが $x + 10$ に等しくなければならないので、$C = 0$、$D = 5$ である。したがって

$$\boxed{\mathrm{g}(x) = 2|x| - |x-5| + 5.}$$

残り二つの部分も確かめる。$x \leq 0$ では $-2x - (5-x) + 5 = -x$、$0 \leq x \leq 5$ では $2x - (5-x) + 5 = 3x$ である。どちらも g の定義と一致する。

考えてみよう そもそも、なぜこの形の式でうまくいく見込みがあったのだろうか。

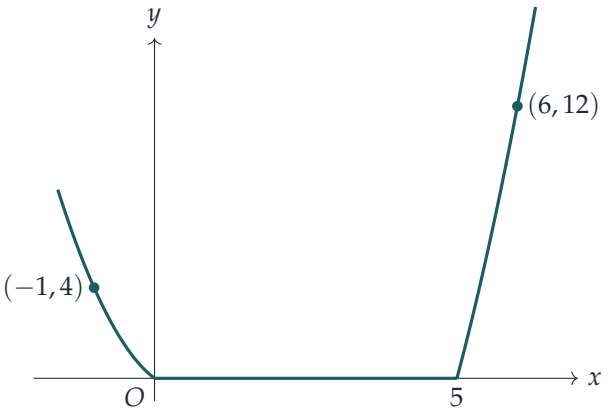
g の各部分は一次式であり、それらは連続（continuous）につながっている（$x = 0$ では両側から 0、$x = 5$ では両側から 15）。一次式の絶対値の和に一次関数を加えたものは、つねに連続かつ区分的に線形（piecewise linear）であり、角ができるのは絶対値が切り替わる点だけである。もし g に跳びがあれば、このような式ではそれを表せない。

小問 (iii)

今度の切り替わる点は $x=0$（$|x|$ について）と $x(x-5)$ の根であり、後者も 0 と 5 である。積 $x(x-5)$ は $x<0$ および $x>5$ で正、その間で負である。

- $x \le 0$ のとき：$\mathrm{h}(x) = x^2 - x + 4x + (x^2 - 5x) = 2x^2 - 2x = 2x(x-1)$。
- $0 \le x \le 5$ のとき：$\mathrm{h}(x) = x^2 - x - 4x - (x^2 - 5x) = 0$。
- $x \ge 5$ のとき：$\mathrm{h}(x) = x^2 - x - 4x + (x^2 - 5x) = 2x^2 - 10x = 2x(x-5)$。

よって h は $[0,5]$ 上で恒等的に 0 である。左側では放物線 $y = 2x(x-1)$ の一部であり、原点に傾き $4x - 2 = -2$ で到達し、$x \to -\infty$ のとき限りなく増加する（たとえば $\mathrm{h}(-1) = 4$）。右側では $y = 2x(x-5)$ の一部であり、$(5,0)$ から傾き $4x - 10 = 10$ で離れていく（たとえば $\mathrm{h}(6) = 12$）。二つの腕は鏡像ではない。右の腕は左の腕の 5 倍の急さで軸から離れる。グラフは連続で、$(0,0)$ と $(5,0)$ に角があり、いたるところで $\mathrm{h}(x) \ge 0$ である。



小問 (iv)

小問 (iii) から必要な道具がわかる。$|x(x-5)|$ は $[0,5]$ の外では $x^2 - 5x$、内では $-(x^2 - 5x)$ に等しいので、x^2 の項を入れたり切ったりできる。関数 k の x^2 の係数は、$[0,5]$ の外で 0、内で 2 である。$ax^2 + d|x(x-5)|$ の x^2 の係数は外で $a+d$、内で $a-d$ であるから、$a+d=0$ かつ $a-d=2$、すなわち $a=1$、$d=-1$ が必要である。よって $x^2 - |x(x-5)|$ は正しい二次の振る舞いをもち、

$$x^2 - |x(x-5)| = \begin{cases} 5x & x \le 0 \text{ または} x \ge 5, \\ 2x^2 - 5x & 0 \le x \le 5. \end{cases}$$

これを k から引くと、区分的に線形な残りが得られる。

$$\mathrm{k}(x) - \left(x^2 - |x(x-5)|\right) = \begin{cases} 5x & x \le 5, \\ 50 - 5x & x \ge 5. \end{cases}$$

これは $x = 5$ にただ一つの角をもち、そこで傾きは 5 から -5 へ、すなわち -10 だけ跳ぶ。したがってこれは $-5|x-5| +$ (一次式) の形である。$x \le 5$ では $-5|x-5| = 5x - 25$ なので、25 を加えれば $5x$ になる。以上から次の式が予想される。

$$\boxed{\mathrm{k}(x) = x^2 - |x(x-5)| - 5|x-5| + 25.}$$

確認。各区間で代入する。

- $x \le 0$ のとき：$x(x-5) \ge 0$ かつ $x - 5 < 0$ なので、式は $x^2 - (x^2 - 5x) - 5(5-x) + 25 = 5x + 5x = 10x$ となる。
- $0 \le x \le 5$ のとき：$x(x-5) \le 0$ かつ $x - 5 \le 0$ なので、式は $x^2 + (x^2 - 5x) - 5(5-x) + 25 = 2x^2$ となる。
- $x \ge 5$ のとき：$x(x-5) \ge 0$ かつ $x - 5 \ge 0$ なので、式は $x^2 - (x^2 - 5x) - 5(x-5) + 25 = 50$ となる。

これらはちょうど k の三つの部分であるから、この式はすべての実数 x に対して正しい。

一つの式による表し方は一意ではない。たとえば $|x(x-5)| = |x|\,|x-5|$ なので答えは書き換えられるし、他の組合せ（$x|x|$ を用いるものなど）でもうまくいく。上の三区間の確認を通過するなら、どの答えでもよい。

検算

- 具体的な値：$\mathrm{g}(-2) = 2$ は定義からも $2(2) - 7 + 5$ からも得られる。$\mathrm{g}(7) = 17 = 14 - 2 + 5$。k については、$\mathrm{k}(3) = 18$ であり $9 - |-6| - 10 + 25 = 18$、$\mathrm{k}(-1) = -10$ であり $1 - 6 - 30 + 25 = -10$。
- 連続性は手早い健全性チェックになる。絶対値から組み立てた一つの式はどれも連続であり、実際 g と k はつなぎ目で一致している（$\mathrm{k}(5) = 50 = 2 \cdot 5^2$）。
- 四つの式すべてを、$[-20, 25]$ 内の 10^5 個の無作為な点で区分的な表示とコンピュータで比較し、丸め誤差の範囲で一致することを確かめた。

よくある間違い

- h の腕を左右対称に描いてしまう。左の腕は $2x(x-1)$、右の腕は $2x(x-5)$ であり、角での傾きは -2 と 10 である。
- $|x(x-5)|$ が**二つ**の点で符号を変えることを忘れる。そのため (iii) では、0 でだけでなく中央の区間全体で符号が反転する。
- 三つの区間すべてに代入せずに k の式を書いて済ませてしまう。確認は必須である。

STEP のその先へ

ここでの傾きの跳びの帳尻合わせは、一般的な事実の最初の味見である。$\mathbb{R}$ 上の連続で区分的に線形な関数で角が有限個のものは、どれも一次関数と $|x-p|$ の形の項の一次結合との和として表せる。これは数値解析における線形スプライン（linear spline）や、ニューラルネットワークの「ReLU」ユニットの背後にある考え方である。実際、$\max(x,0) = \frac{1}{2}(x+|x|)$ である。連続性や区分的に定義された関数の丁寧な扱いについては、Abbott, *Understanding Analysis*（解析学の入門書）を参照されたい。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。