解答例

STEP II 2022、第 3 問

純粋数学 ・ フィボナッチ級数と小数

> **STEP II 2022、問 3**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は、OCR が配布している 2022 年の STEP 過去問一式（zip ファイル）のうち、STEP II の問題用紙にある：
>
> www.ocr.org.uk/Images/696587-2022-past-papers.zip

鍵となる考え方

漸化式（recurrence relation）$F_{r+1} - F_r - F_{r-1} = 0$ がすべての原動力である。これに $\frac{1}{10}$ のべきを掛けて和をとり、添字を付け替える（re-indexing）と、各部分は S_n の定数倍といくつかの端の項の和になる。これはまさに母関数（generating function）の技法である。小問 (i) は安全網の役割を果たす。フィボナッチ数（Fibonacci numbers）は 2 のべきより速くは増大しないことを示しているので、10（あるいは 100）のべきで割れば、残りの部分はきわめて小さく、評価も容易になる。

解答

小問 (i)

まず、すべての F_k について $F_k \geq 0$ である（$F_0, F_1 \geq 0$ であり、非負の数の和は非負であるから、帰納法（induction）により従う）。次に、この数列は決して減少しない。実際、$F_1 \geq F_0$ であり、$k \geq 1$ に対して $F_{k+1} - F_k = F_{k-1} \geq 0$ である。

したがって、すべての $k \geq 1$ に対して

$$F_{k+1} = F_k + F_{k-1} \leq F_k + F_k = 2F_k.$$

ここで $n \geq 1$ を固定し、$r \geq n$ について帰納法を用いる。$r = n$ のとき、主張は $F_n \leq F_n$ となる。ある $r \geq n$ について $F_r \leq 2^{r-n}F_n$ が成り立つとすると、$r \geq 1$ であるから

$$F_{r+1} \leq 2F_r \leq 2 \cdot 2^{r-n}F_n = 2^{(r+1)-n}F_n.$$

これで帰納法が完結し、$n \geq 1$ かつ $r \geq n$ のとき常に $F_r \leq 2^{r-n}F_n$ が成り立つ。

小問 (ii)

左辺の 3 つの和をそれぞれ S_n を用いて書き直す。

第 1 の和。 $k = r+1$ とおくと

$$\sum_{r=1}^{n} \frac{F_{r+1}}{10^{r-1}} = 100 \sum_{k=2}^{n+1} \frac{F_k}{10^k} = 100\left(S_n - \frac{F_1}{10} + \frac{F_{n+1}}{10^{n+1}}\right)$$
$$= 100S_n - 10F_1 + \frac{F_{n+1}}{10^{n-1}}.$$

第 2 の和。 これは単に $10S_n$ である。

第 3 の和。 $k = r-1$ とおくと

$$\sum_{r=1}^{n} \frac{F_{r-1}}{10^{r-1}} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{F_k}{10^k} = F_0 + S_n - \frac{F_n}{10^n}.$$

第 1 の和から第 2 と第 3 の和を引くと

$$(100 - 10 - 1)S_n - 10F_1 - F_0 + \frac{F_n}{10^n} + \frac{F_{n+1}}{10^{n-1}} = 89S_n - 10F_1 - F_0 + \frac{F_n}{10^n} + \frac{F_{n+1}}{10^{n-1}},$$

となり、これが求める結果である。

小問 (iii)

(ii) の左辺の 3 つの和を 1 つにまとめる。その第 r 項は $(F_{r+1} - F_r - F_{r-1})/10^{r-1} = 0$ であるから、左辺は 0 である。$F_0 = 0$、$F_1 = 1$ とすると

$$89S_n = 10 - \frac{F_n}{10^n} - \frac{F_{n+1}}{10^{n-1}}. \qquad (*)$$

考えてみよう 残った 2 つの項が $n \to \infty$ のとき 0 に近づくことは、どうすればわかるだろうか？

ここで小問 (i) が真価を発揮する。そこで $n = 1$ とすると、すべての $r \geq 1$ に対して $F_r \leq 2^{r-1}$ が得られるので

$$0 \leq \frac{F_n}{10^n} \leq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{5}\right)^n, \qquad 0 \leq \frac{F_{n+1}}{10^{n-1}} \leq \frac{2^n}{10^{n-1}} = 10\left(\frac{1}{5}\right)^n,$$

であり、どちらの上界も 0 に収束（converge）する。$(*)$ において $n \to \infty$ とすると $89S_n \to 10$、すなわち

$$\sum_{r=1}^{\infty} \frac{F_r}{10^r} = \frac{10}{89}.$$

残りの部分（tail）については、小問 (i) を $n = 7$ として用いる（$F_7 = 13$ に注意）。$r \geq 7$ に対して $F_r \leq 2^{r-7} \cdot 13$ であるから

$$\sum_{r=7}^{\infty} \frac{F_r}{10^r} \leq \frac{13}{10^7} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{2^j}{10^j} = \frac{13}{10^7} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{5}} = \frac{65}{4} \times 10^{-7} = 1.625 \times 10^{-6} < 2 \times 10^{-6}.$$

$\frac{1}{89}$ **の各桁。**最初の 6 項の和は

$$S_6 = 0.1 + 0.01 + 0.002 + 0.0003 + 0.00005 + 0.000008 = 0.112358.$$

残りの部分 $T = \frac{10}{89} - S_6$ は真に正であり（各項が正であるから）、かつ 2×10^{-6} より小さい。したがって

$$0.112358 < \frac{10}{89} < 0.112360, \qquad \text{ゆえに} \qquad 0.0112358 < \frac{1}{89} < 0.0112360.$$

これらの上下界の真に間にある数はすべて 0.011235… で始まるので、$\frac{1}{89}$ の小数点以下最初の 6 桁は $0, 1, 1, 2, 3, 5$ である。下界が厳密な不等式であることが重要である。これにより、展開が 0.0112357… となる可能性が排除される。

小問 (iv)

目標の数を、先頭の 00 の後ろから 2 桁ずつ区切って読む。

$$0.00\ 01\ 01\ 02\ 03\ 05\ 08\ 13\ 21\ 34\ 55\ldots$$

これらの組は $F_1, F_2, \ldots, F_{10}$ をそれぞれ 2 桁で書いたものである。よって、求める数は $\frac{1}{100}U$ となるはずである。ただし

$$U = \sum_{r=1}^{\infty} \frac{F_r}{100^r}.$$

U の和を求める。小問 (i) より $F_r \le 2^{r-1}$ であるから、この級数は絶対収束（absolutely convergent）する。したがって (ii) と同様に、収束する級数を項ごとにずらしたりまとめたりしてよい。

$$U - \frac{U}{100} - \frac{U}{100^2} = \frac{F_1}{100} + \sum_{r=2}^{\infty} \frac{F_r - F_{r-1} - F_{r-2}}{100^r} = \frac{1}{100}.$$

ここで $r = 1$ の項は（$F_0 = 0$ であるから）$F_1/100$ であり、それ以降の括弧の中はすべて 0 である。よって $U \cdot \frac{9899}{10000} = \frac{1}{100}$ となり、$U = \frac{100}{9899}$ を得る。したがって候補は

$$\frac{U}{100} = \frac{1}{9899},$$

であり、$r = 1$、$s = 9899$ はいずれも 10000 未満の正の整数である。

各桁の確認。最初の 10 項の和を U_{10} とする。$F_1, \ldots, F_{10}$ はいずれも 100 未満であるから、各項の桁は重ならず、

$$U_{10} = 0.01010203050813213455$$

が小数第 20 位まで正確に成り立つ。小問 (i) を $n = 11$ として用いると（$F_{11} = 89$）、残りの項は

$$0 < U - U_{10} \leq \frac{89}{100^{11}} \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{2}{100}\right)^j = \frac{89}{10^{22}} \cdot \frac{100}{98} < 10^{-20}.$$

を満たす。よって $U_{10} < U < U_{10} + 10^{-20}$ であり、U の小数点以下最初の 20 桁は U_{10} のものと一致する。100 で割るとこれらの桁は右に 2 つずれて

$$\frac{1}{9899} = 0.00010102030508132134 55\ldots,$$

となり、これはまさに求められた始まり方である。

検算

- 筆算による割り算で $1/89 = 0.011235955\ldots$ が得られる。011235 の桁は一致しており、その次の桁 9,5,5 は、フィボナッチ数が 2 桁に達すると互いに「繰り上がり」を起こすことを示している。
- (iii) における $r = 6$ より先の残りの部分は、実際には $10/89 - 0.112358 \approx 1.55 \times 10^{-6}$ であり、上界 1.625×10^{-6} を十分に下回っている。
- コンピュータで $1/9899$ を小数第 22 位まで計算すると 0.0001010203050813213455 となる。次の組は $F_{11} = 89$ ではなく 90 である。これは $F_{12} = 144$ が 2 桁の枠からあふれ、1 つ前の組に 1 を繰り上げるためである。

よくある間違い

- (ii) で添字を付け替える際に、端の項を誤ること。ずらした各和の最初と最後の項を書き出しておけば、この誤りは避けられる。
- (iii) で $F_n/10^n$ と $F_{n+1}/10^{n-1}$ が 0 に収束することを示さないこと。小問 (i) はまさにそのためにある。
- 残りの部分が**真に**正であることを忘れること。上界だけでは小数第 6 位の桁は確定しない。

STEP のその先へ

関数 $G(x) = \sum F_r x^r$ はフィボナッチ数の**母関数**であり、項をずらす議論により $|x| < \frac{1}{2}$ に対して $G(x) = x/(1 - x - x^2)$ であることがわかる。$x = \frac{1}{10}$ および $x = \frac{1}{100}$ を代入すると、$\frac{10}{89}$ と $\frac{100}{9899}$ が得られる。母関数は漸化式を代数の問題に変換するものであり、

組合せ論における中心的な道具である。Herbert Wilf の *generatingfunctionology*（母関数論）は生き生きとした入門書である。「収束する級数の並べ替え」を厳密に扱うことは大学 1 年次の解析学の話題である。Abbott, *Understanding Analysis*（解析学入門）を参照のこと。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。