解答例

STEP II 2022、第 2 問

純粋数学 ・ 漸化式

> **STEP II 2022、問 2**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は、OCR が配布している 2022 年の STEP 過去問一式（zip ファイル）のうち、STEP II の問題用紙にある：
>
> www.ocr.org.uk/Images/696587-2022-past-papers.zip

鍵となる考え方

関係式の両辺に 2 を掛けると、これは**二階差分**（second differences）$u_{n+2} - 2u_{n+1} + u_n$ についての主張になる。(i) ではこれが 0 なので、一階差分は一定であり、数列は一次式で表される。(ii) と (iii) では二階差分が与えられた定数、あるいは n の与えられた一次関数であるから、ちょうどその二階差分をもつ多項式（polynomial）を引き去ればよい。すると (i) の型の数列が残る。

解答

小問 (i)

関係式を 2 倍して整理すると、すべての $n \geq 1$ に対して

$$u_{n+2} - u_{n+1} = u_{n+1} - u_n.$$

よって各差はその直前の差に等しく、帰納法（induction）により、すべての差は最初の差 $d = u_2 - u_1$ に等しい。これが隣り合う項の間の一定の差である。

これらの差を $n-1$ 個足し合わせると

$$u_n = u_1 + (n-1)d = dn + (u_1 - d),$$

となる。これは n の多項式であり、その次数（degree）は $d \neq 0$ ならば 1、$d = 0$ ならば 0（定数）である。いずれにせよ次数は高々 1 である。

小問 (ii)

$v_n = t_n + pn^2$ とおく。

$$\tfrac{1}{2}(p(n+2)^2 + pn^2) = p(n^2+2n+2) = p(n+1)^2 + p,$$

であるから、v_n についての関係式は

$$t_{n+1} + p(n+1)^2 = \tfrac{1}{2}(t_{n+2} + t_n) + p(n+1)^2 + p - p,$$

となる。すなわち、すべての $n \geq 1$ に対して $t_{n+1} = \frac{1}{2}(t_{n+2} + t_n)$ である。小問 (i) より、ある定数 A と B を用いて $t_n = A + Bn$ と書けるので

$$v_n = pn^2 + Bn + A.$$

$p \neq 0$ であるから n^2 の項は消えずに残り、v_n の次数はちょうど 2 である。

$v_1 = v_2 = 0$ より

$$p + B + A = 0, \qquad 4p + 2B + A = 0.$$

辺々引くと $3p + B = 0$ となるので $B = -3p$、そして $A = 2p$ である。したがって

$$v_n = p(n^2 - 3n + 2) = p(n-1)(n-2).$$

小問 (iii)

今回は置き換えが示されていないので、自分で見つけなければならない。関係式を 2 倍すると

$$w_{n+2} - 2w_{n+1} + w_n = 2(an + b).$$

考えてみよう 二階差分が n の一次式になるのは、n のどのような多項式か。

差分をとるたびに多項式の次数は 1 つ下がるので、三次式が必要である。$\Delta^2 f(n) = f(n+2) - 2f(n+1) + f(n)$ と書く。直接展開すると

$$\Delta^2 n^3 = (n^3 + 6n^2 + 12n + 8) - 2(n^3 + 3n^2 + 3n + 1) + n^3 = 6n + 6,$$
$$\Delta^2 n^2 = (n^2 + 4n + 4) - 2(n^2 + 2n + 1) + n^2 = 2.$$

よって $\Delta^2(cn^3 + en^2) = 6cn + 6c + 2e$ であり、これがすべての n について $2an + 2b$ に等しくなるのは

$$c = \frac{a}{3}, \qquad e = b - 3c = b - a.$$

のときである。そこで $w_n = t_n + \frac{a}{3}n^3 + (b-a)n^2$ とおく。Δ^2 は線形であるから $\Delta^2 w_n = \Delta^2 t_n + 2(an + b)$ であり、関係式は $\Delta^2 t_n = 0$ となる。これはまさに小問 (i) の関係式である。よって $t_n = A + Bn$ であり

$$w_n = \frac{a}{3}n^3 + (b-a)n^2 + Bn + A.$$

$a \neq 0$ であるから三次の項が存在し、w_n の次数は 3 である。

$w_1 = w_2 = 0$ より

$$\frac{a}{3} + (b-a) + B + A = 0,$$
$$\frac{8a}{3} + 4(b-a) + 2B + A = 0.$$

第 2 式から第 1 式を引くと $\frac{7a}{3} + 3(b-a) + B = 0$ となるので $B = \frac{2a}{3} - 3b$ であり、さらに第 1 式から $A = 2b$ を得る。したがって

$$w_n = \frac{a}{3}n^3 + (b-a)n^2 + \left(\frac{2a}{3} - 3b\right)n + 2b.$$

$w_1 = w_2 = 0$ であるから因数 $n-1$ と $n-2$ が現れるはずであり、n^3 の項と定数項を比較すると、より簡潔な形

$$w_n = \frac{(n-1)(n-2)(an+3b)}{3}.$$

が得られる（$(n-1)(n-2)(an+3b)$ を展開すると $an^3 + (3b-3a)n^2 + (2a-9b)n + 6b$ となり、一致する）。

検算

- (iii) で $a = 0$、$b = p$ とおけば (ii) が再現されるはずであり、実際そうなる：$(n-1)(n-2)\cdot 3p/3 = p(n-1)(n-2)$。
- 漸化式（recurrence）を直接計算してみる。$a = 3$、$b = 0$ のとき $w_{n+2} = 2w_{n+1} - w_n + 6n$ であるから、$w_1 = w_2 = 0$ から $w_3 = 6$、$w_4 = 24$、$w_5 = 60$ を得る。公式は $(n-1)(n-2)n$ を与え、これは $6, 24, 60$ である。
- 次数 3 の数列は三階差分が一定である。$0, 0, 6, 24, 60$ について差分は $0, 6, 18, 36$、次に $6, 12, 18$、さらに $6, 6$ となり、一定で $2a$ に等しい。

よくある間違い

- (i) の数列の次数がちょうど 1 であると述べてしまう。$u_1 = u_2$ ならば定数である。
- (iii) で $w_n = t_n + kn^3$ だけを試してしまう。n^3 の項だけでは $6kn + 6k$ が生じるので、定数を合わせるために n^2 の項も必要である。
- 「ちょうど 2 次」（または 3）であることを $p \neq 0$（または $a \neq 0$）から正当化し忘れる。

STEP のその先へ

これは $y'' = f(x)$ を解くことの離散的類似（discrete analogue）である。一般解（general solution）は特殊解（particular solution）に斉次方程式（homogeneous equation）の解を加えたものであり、ここでは斉次方程式の解は一次の数列 $A + Bn$ である。同じ「余関数（complementary function）＋特殊解」という構造が線形微分方程式（linear differential equations）を支配しており、多項式の特殊解を推測する方法はほとんどそのまま通用する。Boyce and DiPrima, *Elementary Differential Equations*（微分方程式の入門書）では連続版が展開されている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。