解答例

STEP II 2022、第 11 問

確率・統計 ・ 期待損失の最適化

> **STEP II 2022、問 11**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は、OCR が配布している 2022 年の STEP 過去問一式（zip ファイル）のうち、STEP II の問題用紙にある：
>
> www.ocr.org.uk/Images/696587-2022-past-papers.zip

鍵となる考え方

検査する T 本のスティックに何が起こるかで場合分けする。そのうち 1 本でも感染していれば、ネットワークには何も載せられず損失は 0 である。T 本すべてが清浄である場合に限って、ネットワークでの賭けが関わってくる。期待損失（expected loss）を q の関数として書けば、(ii) は 1 変数の最大化（maximisation）の問題になる。また (iii) は、連続する T の値どうしを比較すればよい（T は整数なので、導関数（derivative）ではなく差分（difference）を用いる）。

解答

以下を通して、損失 $-x$ とは £x の利益を意味する。損失の純額（ポンド単位）を L とする。各スティックは独立（independently）に感染し、それぞれ確率 q で清浄であるから、特定の m 本がすべて清浄である確率は q^m である。対称性（symmetry）により、どの T 本を選ぶかは結果に影響しない。

小問 (i)

まず $T > 0$ とする。結果は次の 3 通りである。

- 検査したスティックのうち少なくとも 1 本が感染している（確率 $1 - q^T$）：残りは廃棄され、何も使われないので $L = 0$ である。
- 検査した T 本はすべて清浄だが、残りの $N - T$ 本のうち少なくとも 1 本が感染している（確率 $q^T(1 - q^{N-T})$）：除染の費用を支払うので $L = D$ である。
- N 本すべてが清浄である（確率 $q^T q^{N-T} = q^N$）：使った $N - T$ 本それぞれについて

£1 の利益を得るので $L = -(N-T)$ である。

したがって

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(L) &= D\,q^T\left(1-q^{N-T}\right) - (N-T)\,q^N \\ &= D\,q^T - (N-T+D)\,q^N.\end{aligned}$$

$T=0$ のときは N 本すべてが使われる。確率 $1-q^N$ で $L=D$、確率 q^N で $L=-N$ となり、期待値は $D-(N+D)q^N$ である。これは上の式で $T=0$ としたものと同じであるから、すべての $0 \le T < N$ に対して

$$\mathrm{E}(L) = D\,q^T - (N-T+D)\,q^N.$$

小問 (ii)

α の範囲。 $D>0$、$T \ge 0$、$N-T>0$ であるから、分子と分母は $DT \ge 0$ および $N(N-T+D)>0$ を満たし、よって $\alpha \ge 0$ である。また

$$N(N-T+D) - DT = N(N-T) + D(N-T) = (N-T)(N+D) > 0,$$

であるから $DT < N(N-T+D)$ となり、$\alpha < 1$ である。

最大値をとる点。 N、D、T を固定し、$0 \le q \le 1$ に対して $f(q) = Dq^T - (N-T+D)q^N$ とおく。

$T=0$ のときは $\alpha = 0$ であり、$f(q) = D-(N+D)q^N$ は q について減少するので、最大値は $q=0$、すなわち $q^N = 0 = \alpha$ となるところでとる。

$T \ge 1$ のときは微分して

$$f'(q) = DTq^{T-1} - N(N-T+D)q^{N-1} = N(N-T+D)\,q^{T-1}\left(\alpha - q^{N-T}\right).$$

> **考えてみよう** この停留点（stationary point）が極大であり、しかも区間全体での最大値を与えることは、どうすればわかるか？

因子 $N(N-T+D)q^{T-1}$ は $0<q\le 1$ で正である。$N-T \ge 1$ であるから q^{N-T} は 0 から 1 まで狭義単調増加であり、さらに $0<\alpha<1$ なので、$q_0^{N-T} = \alpha$ を満たす $q_0 \in (0,1)$ がちょうど 1 つ存在する。$q<q_0$ では $f'(q)>0$、$q>q_0$ では $f'(q)<0$ である。よって f は q_0 まで増加し、その後は減少する。したがって $[0,1]$ における最大値は $q^{N-T} = \alpha$ となるところでとる。これが示すべきことであった。

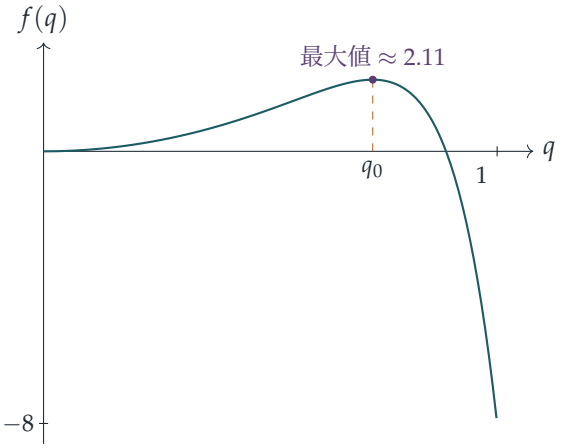
最大値。 q_0 では $q_0^{N-T} = \alpha$ であるから、$q_0 = \alpha^{1/(N-T)}$ かつ $q_0^T = \alpha^{T/(N-T)} = \alpha^k$ であ

る。よって

$$f(q_0) = q_0^T\left(D-(N-T+D)\,q_0^{N-T}\right) = \alpha^k\left(D-(N-T+D)\cdot\frac{DT}{N(N-T+D)}\right)$$
$$= \alpha^k\left(D-\frac{DT}{N}\right) = \frac{D(N-T)\,\alpha^k}{N}.$$

したがって期待損失の最大値は £$D(N-T)\alpha^k/N$ である。（$T=0$ のときはこれは £D となり、$\alpha^0=1$ とみなせば $f(0)=D$ と一致する。）

次のグラフは $N=10$、$T=2$、$D=5$ の場合の f を示したものであり、このとき $\alpha=\frac{1}{13}$ である。



小問 (iii)

今度は N、D、q を固定し、$E_T = Dq^T-(N-T+D)q^N$ とおく。T は整数値しかとらないので、「T について増加」とは $0\le T\le N-2$ に対して $E_{T+1}>E_T$ が成り立つことを意味する。差をとると

$$E_{T+1}-E_T = Dq^{T+1}-Dq^T+q^N$$
$$= q^T\left(q^{N-T}-Dp\right),$$

となる。ここで $q-1=-p$ を用いた。

考えてみよう 括弧の中は T に依存している。どうすれば 1 つの β がすべての T に対して同時に通用するのか？

$0<q\le 1$ かつ $N-T\le N$ であるから $q^{N-T}\ge q^N$ であり、したがって T を含まない条件 $q^N>Dp$ が成り立つようにすれば十分である。ベルヌーイ（Bernoulli）の不等式（帰納法（induction）で容易に示せる：$(1-p)^n\ge 1-np$ ならば $(1-p)^{n+1}\ge$

$(1-np)(1-p) = 1-(n+1)p+np^2$）により

$$q^N = (1-p)^N \geq 1-Np.$$

よって $1-Np > Dp$、すなわち $p < \dfrac{1}{N+D}$ ならば $q^{N-T} \geq q^N \geq 1-Np > Dp$ であり、さらに $q^T > 0$ である。したがって

$$\beta = \frac{1}{N+D} > 0,$$

とすれば、$p < \beta$ であるどの p に対してもすべての T で $E_{T+1} > E_T$ が成り立ち、期待損失は T の増加関数となる。

このような p に対しては、$E_0, E_1, \ldots, E_{N-1}$ のうち最小のものは E_0 である。よって p が十分小さいとき、最善の方針は $T = 0$、すなわち何も検査せずに N 本すべてを使うことである。これは納得のいく結論である。感染がまれであれば、検査はほとんどの場合、利益を生むはずだった健全なスティックを廃棄するだけだからである。

検算

- $N = 1$、$T = 0$ のとき、式は $D-(1+D)q$ を与える。これは確率 p で D を失い、確率 q で 1 を得ることに対応しており、予想どおりである。
- $q = 1$（感染がまったくない）のとき、式は $D-(N-T+D) = -(N-T)$ を与え、確実に $N-T$ の利益が得られる。
- $N = 10$、$T = 2$、$D = 5$ のとき、$\alpha = \frac{1}{13}$、$k = \frac{1}{4}$ であり、最大値は $4 \cdot 13^{-1/4} \approx 2.107$ となって、上のグラフの頂点と一致する。また、$N \leq 7$ についてすべての感染パターンを列挙するコンピュータによる検証で、小問 (i) の式が正しいことを確認した。
- $N = 10$、$D = 5$、$p = 0.3$（$\beta = \frac{1}{15}$ よりかなり大きい）のとき、期待損失は実際には T について**減少**し、$T = 0$ での約 4.58 から $T = 9$ での 0.03 まで下がる。したがって p に関する何らかの条件は本当に必要である。

よくある間違い

- 「検査したスティックが感染している」という結果を忘れること。この場合は期待値への寄与は 0 であるが、確率 $1-q^T$ を占めている。
- 利益を $£(N-T)$ ではなく $£N$ と数えてしまうこと。検査したスティックは、清浄であっても廃棄される。
- (iii) で、整数である T について断りなく微分すること、あるいは T に依存する β を選んでしまうこと。

STEP のその先へ

これは統計的決定理論（statistical decision theory）の小さな問題である。すなわち、パラメータ（p）が未知のときに、期待損失を最小にするような行動（ここでは T）を選ぶ問題である。小問 (ii) は**ミニマックス**（minimax）の考え方であり、各方針について、起こりうるすべての p にわたる最悪の場合を求めている。これは慎重な管理者が比較の基準にしそうなものである。検査のコストと欠陥の見逃しのコストとの間の同じトレードオフは、抜き取り検査（acceptance sampling）やグループ検査（group testing）の背後にもある。ここで用いた期待値（expectation）の道具立てを身につけるには、Blitzstein と Hwang による *Introduction to Probability*（確率論入門）がよい出発点である。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。