解答例

STEP II 2022、第 10 問

力学 ・ 斜面上の放物運動

> **STEP II 2022、問 10**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は、OCR が配布している 2022 年の STEP 過去問一式（zip ファイル）のうち、STEP II の問題用紙にある：
>
> www.ocr.org.uk/Images/696587-2022-past-papers.zip

鍵となる考え方

小問 (i) は標準的な軌道の方程式(trajectory equation)であり、要点は $\sec^2\alpha = 1 + \tan^2\alpha$ を用いてこれを$\tan\alpha$ **についての二次方程式**（quadratic）として読むことである。目標の点に命中させられるのは、ちょうどこの二次方程式が実数解をもつときであるから、問題全体は判別式（discriminant）の条件に帰着する。水平座標 (x, y) で書くと、この条件は円板（disc）を表すことがわかり、以降の小問はすべて直線と円がどこで交わるかを読み取る問題になる。

解答

全体を通して、放物体（projectile）は空気抵抗なしに重力のみを受けて自由に運動する質点とみなし、$0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ とする。

小問 (i)

水平距離と高さを、発射点から測ることにする。時刻 t において

$$s = ut\cos\alpha, \qquad h = ut\sin\alpha - \tfrac{1}{2}gt^2.$$

水平方向の運動から $t = \dfrac{s}{u\cos\alpha}$ であり、これを代入すると

$$h = s\tan\alpha - \frac{gs^2}{2u^2\cos^2\alpha},$$

となり、求める式が得られる。

小問 (ii)

$P = (x, y, y\tan\theta)$ とし、大砲からの水平距離を $s = \sqrt{x^2 + y^2}$ と書く。大砲はどの方向にも向けられるので、P を通る鉛直面内に向ける。すると運動はその平面内で起こり、小問 (i) より、次を満たす角 α（大砲は下向きにも向けられるので負でもよい）が必要である。

$$y\tan\theta = s\tan\alpha - \frac{gs^2}{2u^2}(1 + \tan^2\alpha).$$

$s = 0$ ならば P は原点であり、真上に発射すれば到達できる。また $\sec^2\theta > \tan^2\theta$ であるから、以下の不等式もそこで成り立つ。$s > 0$ のときは $T = \tan\alpha$ とおく。T は任意の実数をとりうる。条件は

$$\frac{gs^2}{2u^2}T^2 - sT + \left(y\tan\theta + \frac{gs^2}{2u^2}\right) = 0$$

が実数解 T をもつこと、すなわちその判別式が非負であることである。

$$s^2 \geq 4 \cdot \frac{gs^2}{2u^2}\left(y\tan\theta + \frac{gs^2}{2u^2}\right) \iff u^4 \geq 2gu^2 y\tan\theta + g^2s^2,$$

ここで $s^2 > 0$ で割り、u^4 を掛けた。g^2 で割って $s^2 = x^2 + y^2$ を用いると

$$x^2 + y^2 + \frac{2u^2\tan\theta}{g}y \leq \frac{u^4}{g^2}.$$

y について平方完成し、$1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta$ を用いると

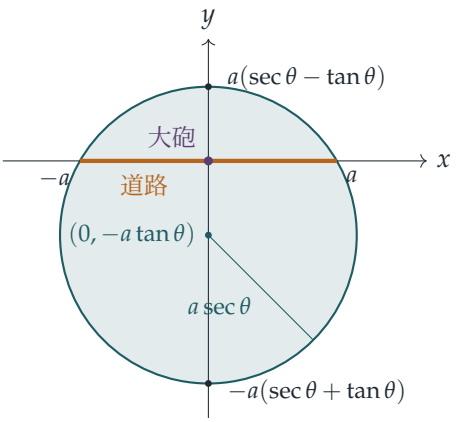
$$x^2 + \left(y + \frac{u^2\tan\theta}{g}\right)^2 \leq \frac{u^4}{g^2}(1 + \tan^2\theta) = \frac{u^4\sec^2\theta}{g^2},$$

となり、これが求める条件である。

考えてみよう 放物体が P に達する**前に**斜面にぶつかることはありうるか？

ありえない。発射の鉛直面内で、放物体の高さから地面の高さを引いたものは、水平距離についての最高次の係数が負の二次式（放物線から直線を引いたもの）であり、大砲の位置と P で 0 になる。したがってその間では正であり、放物体は P に着地するまで地面より上にある。

以下では $a = u^2/g$ と書く。到達可能な点とは、その水平面への射影が中心 $(0, -a\tan\theta)$、半径 $a\sec\theta$ の円板内にある点である。



図（$\theta = 30°$ で描いた）は、到達可能な領域を上から見たものである。「斜面を上る向き」が y の正の向きである。

小問 (iii)

斜面を真っすぐ上る向きとは、$x = 0$、$y > 0$ のことである。条件は $(y + a\tan\theta)^2 \leq a^2\sec^2\theta$ となり、$y + a\tan\theta > 0$ であるから、これは

$$y \leq a(\sec\theta - \tan\theta).$$

と同値である。水平座標 y をもつ斜面上の点は、斜面に沿って測ると原点から距離 $y\sec\theta$ の位置にある。よって、斜面を上る向きで最も遠い点までの距離は

$$a\sec\theta(\sec\theta - \tan\theta) = a\frac{1-\sin\theta}{\cos^2\theta} = a\frac{1-\sin\theta}{(1-\sin\theta)(1+\sin\theta)} = \frac{u^2}{g(1+\sin\theta)},$$

であり、求める結果が得られる。

斜面を真っすぐ下る向きとは、$x = 0$、$y < 0$ のことである。このとき条件から $y \geq -a(\sec\theta + \tan\theta)$ が得られるので、斜面を下る向きで最も遠い点の大砲からの距離は

$$a\sec\theta(\sec\theta + \tan\theta) = a\frac{1+\sin\theta}{\cos^2\theta} = \frac{u^2}{g(1-\sin\theta)}$$

である。

小問 (iv)

道路は直線 $y = 0$（斜面上にあり、高さ 0）である。条件に $y = 0$ を代入すると

$$x^2 \leq a^2\sec^2\theta - a^2\tan^2\theta = a^2,$$

となるので、到達可能な道路の部分は $-a \le x \le a$ であり、その長さは $\dfrac{2u^2}{g}$ で、水平な地面の場合と同じである。

次に、大砲を $(0, c, c\tan\theta)$ に置く。道路（x 軸）からの距離は $\sqrt{c^2 + c^2\tan^2\theta} = |c|\sec\theta$ であるから、$r = |c|\sec\theta$ である。小問 (ii) の内容はすべて**大砲に対する相対的な位置**だけで決まり、斜面はその上のどの点から見ても同じに見えるので、条件の y を $y - c$ に置き換えて用いることができる。道路（$y = 0$）に到達できるのは

$$x^2 \le a^2\sec^2\theta - (a\tan\theta - c)^2.$$

のときである。

考えてみよう 大砲は道路より上に置くべきか、それとも下に置くべきか？

到達可能な長さは $2\sqrt{a^2\sec^2\theta - (a\tan\theta - c)^2}$ であり、引かれている平方が 0 のとき、すなわち $c = a\tan\theta > 0$ のときに最大となる。したがって大砲は道路から斜面を**上った**位置に置き、道路が到達可能な円板の中心をちょうど通るようにする。このとき道路は直径を切り取る。最適な距離は

$$r = a\tan\theta\sec\theta = \frac{u^2\sin\theta}{g\cos^2\theta},$$

であり、道路の最大の長さは円板の直径

$$2a\sec\theta = \frac{2u^2}{g\cos\theta}.$$

である。

検算

- $\theta = 0$（水平な地面）とすると、小問 (ii) は $x^2 + y^2 \le (u^2/g)^2$ となり、どの方向にもおなじみの最大到達距離 u^2/g が得られる。(iii) の二つの答えはいずれも u^2/g になり、(iv) では $r = 0$、長さは $2u^2/g$ となる。
- 斜面を上る向きの答え $u^2/\big(g(1+\sin\theta)\big)$ は、斜面（inclined plane）を上る向きの最大到達距離としてよく知られた結果であり、円板が正しいことを示すよい兆候である。
- $u = 12\,\mathrm{m\,s^{-1}}$、$g = 9.8\,\mathrm{m\,s^{-2}}$、$\theta = 0.5\,\mathrm{rad}$ として、すべての発射角をコンピュータで走査したところ、斜面を上る向きの最大到達距離は 9.932 m、下る向きは 28.226 m となり、$u^2/\big(g(1\pm\sin\theta)\big)$ と一致した。大砲を移動したときの道路の最大の長さは 33.49 m $= 2u^2/(g\cos\theta)$ であった。

よくある間違い

- (x, y) を斜面に沿った距離として扱うこと。これらは水平座標であるから、斜面を上る向きの距離は y ではなく $y\sec\theta$ である。
- 大砲を水平より下に向けてもよいことを忘れること。$\tan\alpha$ はすべての実数をとるので、判別式の条件だけで話が完結するのである。
- 移動した大砲を道路より下に置くこと。円板の中心は大砲から見て斜面を下った位置にあるので、大砲は道路より上に置かなければならない。

STEP のその先へ

小問 (ii) の円板は、ありうるすべての軌道の**包絡線**（envelope）、すなわち「安全放物面」（paraboloid of safety）$z = \dfrac{u^2}{2g} - \dfrac{g(x^2+y^2)}{2u^2}$ の切り口である。この放物面を任意の平面で切ると円錐曲線（conic）が得られ、ここでは射影すると円になる。曲線族の包絡線は、力学でも微分方程式（differential equations）でも、大学 1 年で自然に扱われる話題である。Kleppner and Kolenkow, *An Introduction to Mechanics*（力学入門）は、放物体の問題がこの種の幾何学的な丁寧さで扱われている様子を見るのによい本である。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。