解答例

STEP II 2022、第 1 問

純粋数学 ・ 部分積分

> **STEP II 2022、問 1**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は、OCR が配布している 2022 年の STEP 過去問一式（zip ファイル）のうち、STEP II の問題用紙にある：
>
> www.ocr.org.uk/Images/696587-2022-past-papers.zip

鍵となる考え方

どの小問も、ただ一つの手筋に基づいている。部分積分（integration by parts）を行うと第二の積分が現れ、それがすでに手元にある項と打ち消し合う、あるいはほぼ打ち消し合うのである。(i) と (ii) では、被積分関数（integrand）が積の導関数になっていることを見抜くことがそれにあたる。(iii) では同じ手筋により、二つの積分の差が両端における e^x/x の値の変化にすぎないことがわかり、残りの仕事は (a) のグラフがやってくれる。

解答

小問 (i)

第 1 項を部分積分する。$u = \sqrt{1+x^3}$、$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = 1$ とおくと、$v = x$、$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \dfrac{3x^2}{2\sqrt{1+x^3}}$ であるから

$$\begin{aligned}\int 2\sqrt{1+x^3}\,\mathrm{d}x &= 2x\sqrt{1+x^3} - 2\int x\cdot\frac{3x^2}{2\sqrt{1+x^3}}\,\mathrm{d}x \\ &= 2x\sqrt{1+x^3} - \int \frac{3x^3}{\sqrt{1+x^3}}\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

最後の積分はちょうど被積分関数の第 2 項であるから、それを加えると打ち消される：

$$\int\left(2\sqrt{1+x^3} + \frac{3x^3}{\sqrt{1+x^3}}\right)\mathrm{d}x = 2x\sqrt{1+x^3} + c.$$

$2x\sqrt{1+x^3}$ を積の微分法（product rule）で微分すると $2\sqrt{1+x^3} + \dfrac{3x^3}{\sqrt{1+x^3}}$ に戻り、これで確かめられる。

小問 (ii)

被積分関数を $\dfrac{\sin x}{x} + \dfrac{2\sin x}{x^3}$ と分ける。どちらの項も単独では初等的な原始関数（antiderivative）をもたない（第 1 項は有名な Si の被積分関数である）。したがって (i) と同様に、両者が組み合わさるはずである。第 2 項を部分積分する。$u = \sin x$、$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = 2x^{-3}$ とおくと $v = -x^{-2}$ であるから

$$\int \frac{2\sin x}{x^3}\,\mathrm{d}x = -\frac{\sin x}{x^2} + \int \frac{\cos x}{x^2}\,\mathrm{d}x.$$

次に $\dfrac{\cos x}{x^2}$ を、$u = \cos x$、$v = -x^{-1}$ として部分積分する：

$$\int \frac{\cos x}{x^2}\,\mathrm{d}x = -\frac{\cos x}{x} - \int \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x.$$

$\int \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$ は第 1 項と打ち消し合い、次が残る：

$$\int (x^2+2)\frac{\sin x}{x^3}\,\mathrm{d}x = -\frac{\sin x}{x^2} - \frac{\cos x}{x} + c = -\frac{\sin x + x\cos x}{x^2} + c.$$

検算として、$-\dfrac{\sin x}{x^2}$ を微分すると $-\dfrac{\cos x}{x^2} + \dfrac{2\sin x}{x^3}$、$-\dfrac{\cos x}{x}$ を微分すると $\dfrac{\sin x}{x} + \dfrac{\cos x}{x^2}$ となる。$\cos x/x^2$ の項は打ち消し合い、和は被積分関数に一致する。

小問 (iii)(a)

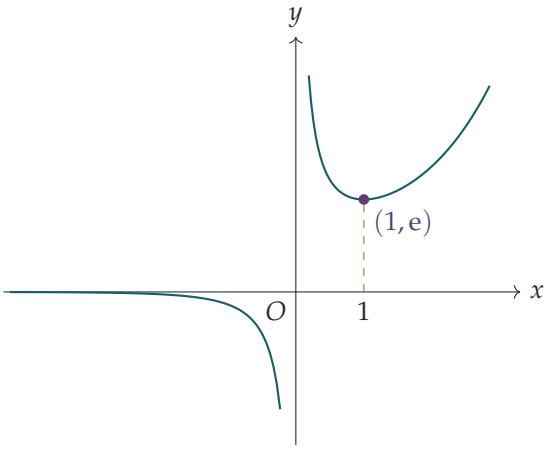
$x \neq 0$ で定義された $y = \dfrac{\mathrm{e}^x}{x}$ を考える。商の微分法（quotient rule）により

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{x\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^x}{x^2} = \frac{\mathrm{e}^x(x-1)}{x^2}.$$

これが 0 となるのは $x = 1$ のときに限るから、停留点（stationary point）は $(1, \mathrm{e})$ のみである。導関数は $x < 1$ $(x \neq 0)$ で負、$x > 1$ で正であるから、$(1, \mathrm{e})$ は極小点（minimum）である。

グラフのその他の形状は次のとおりである。

- $x < 0$ では $y < 0$ であり、y は減少する。$x \to -\infty$ のとき $y \to 0^-$ である（指数関数が勝つ）から、x 軸の負の部分が漸近線（asymptote）となる。$x \to 0^-$ のとき $y \to -\infty$ である。
- $x > 0$ では $y > 0$ である。$x \to 0^+$ のとき $y \to +\infty$ であり、y は $x = 1$ で最小値 e まで減少したのち、どの多項式よりも速く $+\infty$ へ増加する。
- y 軸は垂直な漸近線であり、曲線はどちらの軸とも交わらない。



小問 (iii)(b)

$\dfrac{\mathrm{e}^x}{x^2}$ を、$u = \mathrm{e}^x$、$v = -x^{-1}$ として部分積分する：

$$\int \frac{\mathrm{e}^x}{x^2}\,\mathrm{d}x = -\frac{\mathrm{e}^x}{x} + \int \frac{\mathrm{e}^x}{x}\,\mathrm{d}x, \qquad \text{よって} \qquad \int \left(\frac{\mathrm{e}^x}{x} - \frac{\mathrm{e}^x}{x^2}\right)\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{e}^x}{x} + c.$$

（同じことであるが、$\frac{\mathrm{e}^x}{x} - \frac{\mathrm{e}^x}{x^2} = \frac{\mathrm{e}^x(x-1)}{x^2}$ は (a) で求めた導関数である。）

考えてみよう そもそも a から $2a$ まで積分してよいのだろうか？

どちらの被積分関数も $x = 0$ で発散し、0 の近くでは e^x/x^2 の積分が発散する（diverge）ので、積分区間は 0 を避けなければならない。そのためには $a \neq 0$ が必要である。このとき a と $2a$ は同符号であるから、0 がその間に入ることはなく、積分は有限である。

二つの積分が等しいのは、その差が 0 となるとき、かつそのときに限る：

$$\left[\frac{\mathrm{e}^x}{x}\right]_a^{2a} = \frac{\mathrm{e}^{2a}}{2a} - \frac{\mathrm{e}^a}{a} = \frac{\mathrm{e}^a}{2a}(\mathrm{e}^a - 2) = 0.$$

$\mathrm{e}^a/(2a) \neq 0$ であるから $\mathrm{e}^a = 2$ が必要であり、

$$a = \ln 2.$$

小問 (iii)(c)

(b) とまったく同様に、整数 $m \neq n$ に対して二つの積分が有限となりうるのは、m と n の間の閉区間に 0 が含まれないときに限る。よって m と n は 0 でなく、同符号である。二つの積分の差は

$$\int_m^n \frac{\mathrm{e}^x}{x}\,\mathrm{d}x - \int_m^n \frac{\mathrm{e}^x}{x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{e}^n}{n} - \frac{\mathrm{e}^m}{m},$$

であるから、$f(x) = \mathrm{e}^x/x$ が同じ値をとるような、同符号の相異なる二つの整数が必要となる。言い換えれば、ある水平な直線が (a) のグラフと、x が整数である二点で交わらなければならない。

考えてみよう $x > 0$ の部分の曲線は、下がってからまた上がるので一対一（one-to-one）ではない。それなのに、なぜ二つの正の整数が同じ高さを与えることはありえないのだろうか？

それは、極値点（turning point）が $x = 1$ にあり、これ自体が最小の正の整数だからである。場合ごとに順に調べる。

- **両方とも負の場合。** (a) より f は $x < 0$ で狭義単調減少（strictly decreasing）であるから、$m \neq n$ ならば $f(m) \neq f(n)$ である。
- **両方とも正の場合。** このとき $m, n \geq 1$ であり、$x > 1$ で $f'(x) > 0$ であるから、f は $[1, \infty)$ で狭義単調増加である。やはり $m \neq n$ ならば $f(m) \neq f(n)$ である。

水平な直線が正の側の枝と 2 回交わることはありうるが、その場合、交点の一方は $0 < x < 1$ にあり、そこには整数がない。したがって、条件を満たす相異なる整数の組は存在せず、題意のとおり不可能である。

検算

- (i) について、$x = 1$ における原始関数の値は $2\sqrt{2}$ であり、区間 $[0, 1]$ での積分の数値は 2.8284… で、一致する。
- (ii) について、区間 $[1, 10]$ での積分の数値は 1.4711… であり、$-(\sin x + x\cos x)/x^2$ の値の変化と同じである。
- (iii)(b) について、$a = \ln 2$ のとき二つの積分はどちらも約 1.9224 となる。また $f(\ln 2) = 2/\ln 2 = f(2\ln 2)$ であることにも注意しよう。二つの端点は極小点の両側で同じ高さにあり、グラフから予想されるとおりである。
- (iii)(c) について、二つの整数で値が最も近くなるのは $f(1) = \mathrm{e} \approx 2.718$ と $f(2) = \frac{1}{2}\mathrm{e}^2 \approx 3.695$ である。

よくある間違い

- (b) と (c) で、0 を含む区間では積分が意味をもたなくなることを忘れ、そのために m と n が同符号でなければならない理由を見落とす。
- (c) で、制限をつけずに「f は一対一である」と論じる。実際には一対一ではない

（たとえば $f(\ln 2) = f(2\ln 2)$）。議論には $x = 1$ にある極値点が必要である。

STEP のその先へ

小問 (i) と (ii) は、被積分関数のどちらの項も初等的な原始関数をもたないのに、その和はもつという例である。微分代数（differential algebra）におけるリウヴィル（Liouville）の定理は、どのような関数が初等的な原始関数をもつかを厳密に定める。e^x/x、$\sin x/x$、$\sqrt{1+x^3}$ はもたず、それゆえに打ち消し合いが本質的なのである。小問 (iii)(c) は単射性（injectivity）の議論であり、解析学の講義では、単調性（monotonicity）や平均値の定理（mean value theorem）に関するこうした推論が厳密に扱われる。Abbott, *Understanding Analysis*（解析学入門）を参照されたい。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。