解答例

STEP III 2021、第 9 問

力学 ・ 反発係数を伴う斜め衝突

STEP III 2021、問 9

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は、OCR が配布している 2021 年の STEP 過去問一式（zip ファイル）のうち、STEP III の問題用紙にある：

www.ocr.org.uk/Images/696588-2021-past-papers.zip

鍵となる考え方

幾何の部分は、角の三角形 CPQ と BRP に正弦定理（sine rule）を 2 回用いるだけである。CB から測った QR の共通の高さは、2 式を掛け合わせると消える。跳ね返りについては、滑らかな（smooth）壁は壁に沿った速度成分を保ち、壁に垂直な成分を e 倍する。したがって、衝突の前後で経路が壁となす角は $\tan(\text{衝突後}) = e\tan(\text{衝突前})$ を満たす。各跳ね返りから、最初の結果に現れる 2 つの括弧のうちの 1 つがそれぞれ得られる。

解答

幾何的な恒等式

直線 QR と BC の距離を h とする。$QR \parallel CB$ であるから三角形 AQR は正三角形であり、$CQ = BR = h/\sin 60^\circ = 2h/\sqrt{3}$ である。

三角形 CPQ において、C における角は 60°、P における角は θ であるから、Q における角は $120^\circ - \theta$ である。正弦定理より

$$\frac{CP}{\sin(120^\circ - \theta)} = \frac{CQ}{\sin\theta} \quad \Longrightarrow \quad (a-x)\sin\theta = \frac{2h}{\sqrt{3}}\left(\tfrac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta + \tfrac{1}{2}\sin\theta\right).$$

$\sin\theta$（$0 < \theta < 180^\circ$ より 0 でない）で割って整理すると

$$\sqrt{3}\cot\theta + 1 = \frac{\sqrt{3}\,(a-x)}{h}.$$

三角形 BRP において、B における角は 60°、R における角は ϕ、P における角は $120^\circ - \phi$

である。正弦定理より

$$\frac{BP}{\sin\phi} = \frac{BR}{\sin(120^\circ - \phi)} \quad \Longrightarrow \quad x\left(\tfrac{\sqrt{3}}{2}\cos\phi + \tfrac{1}{2}\sin\phi\right) = \frac{2h}{\sqrt{3}}\sin\phi,$$

したがって

$$\sqrt{3}\cot\phi + 1 = \frac{4h}{\sqrt{3}\,x}.$$

2 つの結果を掛け合わせると、h と $\sqrt{3}$ が消えて

$$(\sqrt{3}\cot\phi + 1)(\sqrt{3}\cot\theta + 1) = \frac{4(a-x)}{x},$$

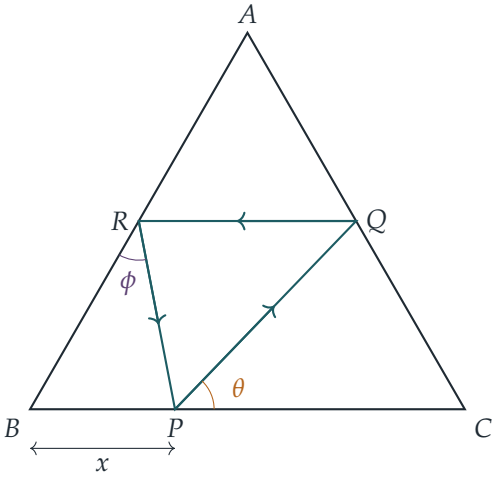
となり、両辺に x を掛ければ求める恒等式が得られる。

跳ね返り

球を滑らかな台の上を動く質点とみなす。すると球は衝突と衝突の間は直線上を進む。また枠も滑らかとみなすので、各衝突では壁に垂直な力積（impulse）だけが働く。球が速さ u で壁と角 α をなして壁に当たり、速さ v で壁と角 β をなして離れるとする。壁に沿った成分は変わらず、壁に垂直な成分は向きが反転して e 倍される：

$$v\cos\beta = u\cos\alpha, \qquad v\sin\beta = eu\sin\alpha \quad \Longrightarrow \quad \tan\beta = e\tan\alpha.$$

また球は壁に沿って同じ向きに動き続けるので、その向きから測れば α も β も鋭角である。（$e > 0$ が必要である。そうでなければ、球は最初の衝突の後、壁に沿って滑ってしまう。）



Q において。球は PQ に沿って、壁 CA と角 $\angle PQC = 120^\circ - \theta$ をなし、A の方へ向かって到着する。そして QR に沿って、壁と角 $\angle AQR = 60^\circ$ をなして離れる（$QR \parallel CB$

であるから同位角（corresponding angles）による）。よって

$$\tan 60^\circ = e\tan(120^\circ - \theta).$$

$\tan 120^\circ = -\sqrt{3}$ として差の公式（subtraction formula）を用い、さらに分子と分母に $\cot\theta$ を掛けると

$$\tan(120^\circ - \theta) = \frac{-\sqrt{3} - \tan\theta}{1 - \sqrt{3}\tan\theta} = \frac{\sqrt{3}\cot\theta + 1}{\sqrt{3} - \cot\theta}.$$

$c = \sqrt{3}\cot\theta$ とおく。跳ね返りの条件 $\sqrt{3}(\sqrt{3} - \cot\theta) = e(\sqrt{3}\cot\theta + 1)$ は $3 - c = e(c+1)$、すなわち $4 - (c+1) = e(c+1)$ となるので

$$\sqrt{3}\cot\theta + 1 = \frac{4}{1+e}.$$

R において。球は QR に沿って、壁 AB と角 $\angle ARQ = 60^\circ$ をなし、B の方へ向かって到着し、RP に沿って角 $\angle BRP = \phi$ をなして離れる。よって

$$\tan\phi = e\tan 60^\circ = \sqrt{3}e, \qquad \text{よって} \qquad \sqrt{3}\cot\phi = \frac{1}{e}, \qquad \sqrt{3}\cot\phi + 1 = \frac{1+e}{e}.$$

x を求める。2 つの括弧を恒等式に代入すると

$$\frac{1+e}{e}\cdot\frac{4}{1+e}\cdot x = 4(a-x) \quad\Longrightarrow\quad x = e(a-x) \quad\Longrightarrow\quad x = \frac{ae}{1+e},$$

となり、示すべき結果が得られた。

もう一周する

考えてみよう 球が再び PQ に沿って進み出すためには、P で何が起こらなければならないか。

球は RP に沿って P に到達する。三角形 BRP において、この経路は BC と角 $\angle RPB = 120^\circ - \phi$ をなすので、球が C の方へ向かって到着するのはこの角が鋭角であるときに限る。PQ を再びたどるには、PC と角 θ をなして離れなければならないので、

$$\tan\theta = e\tan(120^\circ - \phi).$$

が必要である。Q における計算から $\sqrt{3}\cot\theta = \frac{4}{1+e} - 1 = \frac{3-e}{1+e}$ であるから $\tan\theta = \dfrac{\sqrt{3}(1+e)}{3-e}$ であり、これは正である。つまり PQ は確かに C の側へ向かっている。

Q のときと同じ式で、θ を ϕ に置き換え、$\sqrt{3}\cot\phi = \frac{1}{e}$ を用いると

$$\tan(120^\circ - \phi) = \frac{\sqrt{3}\,(\sqrt{3}\cot\phi + 1)}{3 - \sqrt{3}\cot\phi} = \frac{\sqrt{3}\,(1+e)/e}{(3e-1)/e} = \frac{\sqrt{3}(1+e)}{3e-1}.$$

$e \le \frac{1}{3}$ ならば $120^\circ - \phi \ge 90^\circ$ であるから、衝突後、球は BC から真っすぐ離れるか、B の方へ戻る向きに動く。このとき球は C の方へ傾いた PQ をたどることはできない。よって $e > \frac{1}{3}$ であり、条件は

$$\frac{\sqrt{3}(1+e)}{3-e} = \frac{\sqrt{3}e(1+e)}{3e-1} \quad \Longleftrightarrow \quad 3e-1 = 3e-e^2 \quad \Longleftrightarrow \quad e^2 = 1.$$

となる。$e > 0$ であるから $e = 1$ となり、示すべき結果が得られた。球の速さは各衝突で変化する（$e = 1$ の場合を除く）が、ここでは速さは何の役割も果たさない。重要なのは向きだけである。

検算

- $e = 1$ のとき：$x = \frac{a}{2}$、$\tan\theta = \tan\phi = \sqrt{3}$ であるから $\theta = \phi = 60^\circ$ であり、PQR は各辺の中点を結ぶ三角形となる。対称性から、これは完全弾性（perfectly elastic）の場合の閉じた軌道であり、予想どおりである。
- $a = 1$、$e = \frac{1}{2}$ のとき：$x = \frac{1}{3}$、$\theta \approx 46.10^\circ$ である。コンピュータで球を 3 回の衝突まで追跡すると、球は正確に P に戻る。次の衝突の後、球は BC と 46.10° ではなく約 68.95° の角をなして離れるので、再び PQR を回ることはない。
- $e \to 0$ のとき $x \to 0$ であり、P は角 B に寄っていく。これは、球が各壁に垂直な方向の速度をほぼすべて失うことと合っている。

よくある間違い

- e を速度全体、あるいは壁に沿った成分に掛けてしまう。変化するのは滑らかな壁に垂直な成分だけである。
- 入射角を法線から測っておきながら、壁から測った角について成り立つ $\tan\beta = e\tan\alpha$ を用いてしまう。法線から測る場合、法則は $\cot\beta = e\cot\alpha$ となる。
- 最後の部分で、$120^\circ - \phi$ が鈍角になりうることや、$e = -1$ を除外しなければならないことを忘れる。

STEP のその先へ

領域の内部で跳ね返る球の経路は、**数学的ビリヤード**（mathematical billiards）の主題である。$e = 1$ のとき、中点を結ぶ三角形はファニャーノ（Fagnano）軌道である。任意の鋭角三角形において、この軌道は垂線の足（feet of the altitudes）を結び、周の長さが最小の内接三角形となる。$e < 1$ のときは、跳ね返るたびに経路が壁の方へ寝

ていき、ここで見たとおり、球は閉じた周回を繰り返すことができない。Kleppner と Kolenkow の *An Introduction to Mechanics*（力学入門）は、力積と衝突を丁寧に扱っている。ビリヤードそのものについては、Tabachnikov の *Geometry and Billiards*（幾何学とビリヤード）が次の一歩として素晴らしい本である。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。