解答例

STEP III 2021、第 8 問

純粋数学 • 漸化式と極限

STEP III 2021、問 8

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は、OCR が配布している 2021 年の STEP 過去問一式（zip ファイル）のうち、STEP III の問題用紙にある：

www.ocr.org.uk/Images/696588-2021-past-papers.zip

この問題は、*Beyond STEP* の第 2.8 節「2 乗して 2 を引く」で詳しく解説されている：
https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/ch02/squaring-minus-two.html

鍵となる考え方

すべては漸化式（recurrence）を因数分解（factorise）することにかかっている。両辺から 2 を引くと $x_{n+1}-2=(x_n-2)(x_n+2)$ となるので、項がいったん 2 を超えれば、2 からの距離は各段階で 4 より大きい倍率で拡大される。これにより小問 (i) が得られ、小問 (ii) もそこから従う。小問 (iii) では、x_{n+1}^2 から 4 を引いたものが同じように見事に因数分解でき、まさにそのことによって積 $x_1x_2\cdots x_n$ が入れ子式に打ち消し合う（telescope）のである。

解答

小問 (i)

n に関する数学的帰納法（induction）を用いる。$n=1$ のとき、主張は $x_1\geq 2+4^0(a-2)=a$ となり、これは等号で成り立つ（$4^0=1$ に注意）。

ある $n\geq 1$ について $x_n\geq 2+4^{n-1}(a-2)$ が成り立つと仮定する。$a>2$ であるから右辺は 2 より大きく、したがって $x_n>2$ である。ここで

$$x_{n+1}-2=x_n^2-4=(x_n-2)(x_n+2).$$

$x_n-2>0$ かつ $x_n+2>4$ であるから、$(x_n-2)(x_n+2)\geq 4(x_n-2)$ である。帰納法

の仮定（inductive hypothesis）$x_n - 2 \geq 4^{n-1}(a-2)$ を用いると、

$$x_{n+1} - 2 \geq 4(x_n - 2) \geq 4 \cdot 4^{n-1}(a-2) = 4^n(a-2),$$

となり、これは $n+1$ に対する主張である。数学的帰納法により、すべての $n \geq 1$ に対して $x_n \geq 2 + 4^{n-1}(a-2)$ が成り立つ。

ここでは不等式を一度も 2 乗していない。$x_n \geq$ (下からの評価) を 2 乗してよいのは両辺が非負のときに限られるが、因数分解した形を使えばその心配はまったく不要になる。

小問 (ii)

$|a| > 2$ のとき。 このとき $x_2 = a^2 - 2 > 4 - 2 = 2$ である。数列 $x_2, x_3, \ldots$ は同じ漸化式に従い、2 より大きい値から始まるので、a の代わりに x_2 として小問 (i) を適用すると（添字を 1 つずらして）、

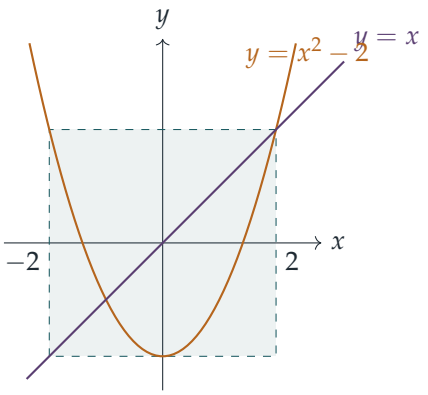
$$x_n \geq 2 + 4^{n-2}(x_2 - 2) \qquad (n \geq 2).$$

を得る。$x_2 - 2 > 0$ かつ $4^{n-2} \to \infty$ であるから、$x_n \to \infty$ となる。

$|a| \leq 2$ のとき。 すべての n に対して $-2 \leq x_n \leq 2$ であることを帰納法で示す。$n = 1$ のときは成り立つ。$-2 \leq x_n \leq 2$ ならば $0 \leq x_n^2 \leq 4$ であるから $-2 \leq x_n^2 - 2 \leq 2$、すなわち $-2 \leq x_{n+1} \leq 2$ である。よってこの数列は有界（bounded）であり、無限大に発散することはない。

> **考えてみよう** $|a| \leq 2$ の場合、すべての n に対して $x_n \leq 2$ を示すだけで十分だろうか？

十分ではない。上からの評価だけでは足りない。-2 より小さい項があると、その 2 乗は 4 より大きくなり、次の項は 2 を超えてしまうからである。だからこそ、帰納法では両側の評価を同時に保たなければならない。グラフを見ればうまくいく理由がわかる。放物線 $y = x^2 - 2$ は区間 $[-2, 2]$ をそれ自身の上へ写すのである。



2 つの場合をまとめると、$x_n \to \infty$ となるのは $|a| > 2$ のとき、かつそのときに限る。

小問 (iii)

ここですべてを動かす因数分解は

$$x_{n+1}^2 - 4 = (x_n^2 - 2)^2 - 4 = x_n^4 - 4x_n^2 = x_n^2\,(x_n^2 - 4).$$

である。$a > 2$ であるから、小問 (i) よりすべての n に対して $x_n > 2$ であり、したがって $x_n > 0$ かつ $x_n^2 - 4 > 0$ である。正の平方根をとると、

$$\sqrt{x_{n+1}^2 - 4} = x_n \sqrt{x_n^2 - 4}.$$

これを繰り返し用いると（厳密には n に関する帰納法により）、

$$\sqrt{x_{n+1}^2 - 4} = x_n \sqrt{x_n^2 - 4} = x_n x_{n-1} \sqrt{x_{n-1}^2 - 4} = \cdots = x_1 x_2 \cdots x_n \sqrt{a^2 - 4}.$$

したがって、すべての $n \geq 1$ に対して

$$\frac{\sqrt{x_{n+1}^2 - 4}}{x_{n+1}} = \frac{\sqrt{a^2 - 4}\, x_1 x_2 \cdots x_n}{x_{n+1}},$$

が成り立ち、y_n の定義と比べると、求める式がすべての n に対して成り立つのはちょうど $A = \sqrt{a^2 - 4}$ のときであることがわかる。

a を求める。 $A = \sqrt{a^2 - 4}$ という値は必然的に決まる。$n = 1$ のとき、求める式は $Aa/x_2 = a\sqrt{a^2 - 4}/x_2$ となり、$a > 0$ かつ $x_2 > 0$ であるから $A = \sqrt{a^2 - 4}$ を得る。逆に、$a > 2$ のもとで $A = \sqrt{a^2 - 4}$ ならば $A^2 = a^2 - 4$ であるから、

$$a = \sqrt{A^2 + 4}.$$

この値は確かに $a > 2$ を満たす。$A > 0$ より $A^2 + 4 > 4$ だからである。この a に対しては $\sqrt{a^2 - 4} = A$ となり、上に示した恒等式はすべての $n \geq 1$ に対して $y_n = \sqrt{x_{n+1}^2 - 4}\,/\,x_{n+1}$ となって、求める結果が得られる。

収束。この a の値に対して、$x_{n+1} > 0$ であるから

$$y_n = \frac{\sqrt{x_{n+1}^2 - 4}}{x_{n+1}} = \sqrt{1 - \frac{4}{x_{n+1}^2}}.$$

$a > 2$ であるから、小問 (ii) より $x_{n+1} \to \infty$ であり、したがって $4/x_{n+1}^2 \to 0$ かつ $y_n \to 1$ となる。2 番目の数列は収束（converge）し、その極限（limit）は 1 である。

検算

- $A = 1$ とすると $a = \sqrt{5} \approx 2.236$ である。このとき $x_2 = 3$、$x_3 = 7$ で、$y_1 = \sqrt{5}/3 \approx 0.745$ となる。式からは $\sqrt{9-4}/3 = \sqrt{5}/3$ となり、一致する。次に、$y_2 = \sqrt{5}\cdot 3/7 \approx 0.958$ であり、$\sqrt{49-4}/7 = 3\sqrt{5}/7$ となって、これも一致する。項 $y_3 \approx 0.99909$ と $y_4 \approx 0.9999996$ は猛烈な速さで 1 に近づいている。
- $t > 1$ として $a = t + 1/t$ と置換すると、$x_n = t^{2^{n-1}} + t^{-2^{n-1}}$ が得られる。これにより、増大が実際にどれほど速いか（二重指数関数的（doubly exponential）であり、小問 (i) の 4^{n-1} よりはるかに速い）がわかり、また上のすべての結果と矛盾しない。
- 小問 (i) の評価と小問 (ii) の有界性は、多数のランダムな初期値についてコンピュータでも確かめた。

よくある間違い

- 帰納法の仮定から得た不等式を、両辺が非負であることを先に確かめずに 2 乗してしまう。
- 小問 (ii) で、$|a| \le 2$ のときに $x_n \le 2$ だけを示してしまう。$x_n \ge -2$ も必要であり、そうでないと次の項が 2 を超えてしまう可能性がある。
- 逆算して a を求めたものの、その値がすべての n に対してうまくいくことや、$a > 2$ を満たすことを確かめていない。

STEP のその先へ

写像 $x \mapsto x^2 - 2$ は、2 次写像族 $x \mapsto x^2 + c$ のなかで最も有名なものである。$[-2, 2]$ 上では、$x = 2\cos\theta$ とおくとこの写像は角の 2 倍化 $\theta \mapsto 2\theta$ になり、これはカオス力学系（chaotic dynamics）の標準的な最初の例である。この区間の外では、すべての軌道（orbit）が無限大へと逃げていく。$a > 2$ の場合は $x = 2\cosh u$ とおけば同じ考え方が

通用し、そのとき小問 (iii) の積は、古典的な $\prod \cos(\theta/2^k)$ の入れ子式の打ち消し合いの双曲線関数版になる。ここで用いた極限や帰納法の背後にある解析学については、Abbott の *Understanding Analysis*（解析学入門書）を読むとよい。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。