解答例

STEP III 2021、第 7 問

純粋数学 • 図形における複素数

STEP III 2021、問 7

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は、OCR が配布している 2021 年の STEP 過去問一式（zip ファイル）のうち、STEP III の問題用紙にある：

www.ocr.org.uk/Images/696588-2021-past-papers.zip

鍵となる考え方

単位円（unit circle）上の 2 点を足したり引いたりするとき、すなわち $e^{i\theta} \pm e^{i\phi}$ を扱うときは、「平均」の因子 $e^{i(\theta+\phi)/2}$ をくくり出す。残るのは純粋な余弦か純粋な正弦であり、これが小問 (i) を成り立たせる仕組みである。すると小問 (i) は $(a+b)/(a-b)$ が純虚数（purely imaginary）であることを述べており、複素平面において「比が純虚数」とは「垂直（perpendicular）」ということである。その後はすべて a, b, c, d の和を整理する作業にすぎない。

解答

小問 (i)

$\alpha = \frac{1}{2}(\theta+\phi), \beta = \frac{1}{2}(\theta-\phi)$ とおくと、$\theta = \alpha+\beta, \phi = \alpha-\beta$ である。このとき

$$e^{i\theta} + e^{i\phi} = e^{i\alpha}\left(e^{i\beta} + e^{-i\beta}\right) = 2\cos\beta\, e^{i\alpha},$$
$$e^{i\theta} - e^{i\phi} = e^{i\alpha}\left(e^{i\beta} - e^{-i\beta}\right) = 2i\sin\beta\, e^{i\alpha}.$$

条件 $\theta - \phi \neq 2n\pi$ は、ちょうど β が π の倍数でないことを意味するので、$\sin\beta \neq 0$ であり、分母は零でない。割り算をすると

$$z = \frac{2\cos\beta}{2i\sin\beta} = -i\cot\beta = -i\cot\left(\tfrac{1}{2}(\theta-\phi)\right) = i\cot\left(\tfrac{1}{2}(\phi-\theta)\right),$$

となる。ここで $1/i = -i$ と、cot が奇関数（odd function）であることを用いた。これが求める結果である。

$\cot(\frac{1}{2}(\phi-\theta))$ は実数なので、z は虚軸上にある：

$$|z| = \left|\cot\left(\tfrac{1}{2}(\phi-\theta)\right)\right|, \qquad \arg z = \begin{cases} \frac{1}{2}\pi & \text{条件：} \cot(\frac{1}{2}(\phi-\theta)) > 0, \\ -\frac{1}{2}\pi & \text{条件：} \cot(\frac{1}{2}(\phi-\theta)) < 0. \end{cases}$$

$\cot(\frac{1}{2}(\phi-\theta)) = 0$、すなわち $\phi-\theta$ が π の奇数倍のときは、$z=0$ となり、その偏角（argument）は定義されない。（これは 2 点が直径の両端にあり、和が零になる場合である。）

小問 (ii)

A と B は原点を中心とする単位円上にあるので、$a = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}, b = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}$ と書ける。2 点は異なるので $\theta-\phi$ は 2π の倍数ではなく、小問 (i) が適用できる：

$$\frac{x}{a-b} = \frac{a+b}{a-b} = \mathrm{i}k, \qquad k = \cot\left(\tfrac{1}{2}(\phi-\theta)\right) \in \mathbb{R}.$$

$x = a+b \neq 0$ であるから、$k \neq 0$ である。よって $x = \mathrm{i}k(a-b)$ となる。つまり、ベクトル $\overrightarrow{OX}$（x で表される）は、ベクトル $\overrightarrow{BA}$（$a-b$ で表される）を直角だけ回転し、零でない実数 k 倍したものである。同じことだが、$\arg x - \arg(a-b) = \pm\frac{1}{2}\pi$ である。したがって OX は AB に垂直である。

考えてみよう なぜ $a+b \neq 0$ が必要なのか？

$a+b=0$ ならば X は原点そのものである。直線 OX が存在しないので、垂直になるべきものがない。代数的には、これは $k=0$ の場合であり、x の偏角が定義されない。

小問 (iii)

$h = a+b+c$ とすると

$$h-a = b+c.$$

複素数 $h-a$ はベクトル $\overrightarrow{AH}$ を表す。場合は二つある。

- $b+c=0$ ならば $h-a=0$ であるから、$h=a$ である。
- $b+c \neq 0$ ならば、単位円上の異なる 2 点 B と C に小問 (ii) を適用する。すると、$b+c$ で表されるベクトルは BC に垂直である。そのベクトルは $\overrightarrow{AH}$ であるから、AH は BC に垂直である。（ここでは $H \neq A$ なので、AH はきちんとした直線である。）

よって、$h=a$ または $AH \perp BC$ となり、題意が示された。対称性により、BH と CA、CH と AB についても同じことが成り立つので、H は確かに各頂点からの垂線

（altitude）上にある。$h = a$ となるのは BC が直径のときであり、このとき三角形は A で直角をもち、その垂心（orthocentre）は頂点 A である。

小問 (iv)

垂心の定義より

$$p = a + b + c, \qquad q = b + c + d, \qquad r = c + d + a, \qquad s = d + a + b.$$

AQ の中点（midpoint）は

$$\tfrac{1}{2}(a + q) = \tfrac{1}{2}(a + b + c + d).$$

この式は a, b, c, d について対称であるから、これは BR, CS, DP の中点でもある：

$$\tfrac{1}{2}(b + r) = \tfrac{1}{2}(c + s) = \tfrac{1}{2}(d + p) = \tfrac{1}{2}(a + b + c + d).$$

$m = \frac{1}{2}(a + b + c + d)$ で表される点を M とする。すると

$$q = 2m - a, \qquad r = 2m - b, \qquad s = 2m - c, \qquad p = 2m - d.$$

よって、ただ一つの写像

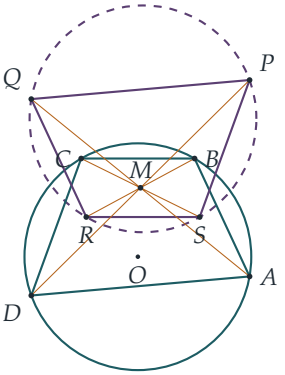
$$T : w \longmapsto 2m - w$$

が $A \mapsto Q, B \mapsto R, C \mapsto S, D \mapsto P$ と移す。したがって、この写像は四角形 $ABCD$ を頂点ごとに $QRSP$ へ移す。

T を記述するために、$T(w) - m = -(w - m)$ と書く。M からの変位が逆向きになっており、これは M のまわりに $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}$ を掛けることである。よって

T は、複素数 $\frac{1}{2}(a + b + c + d)$ で表される点 M を中心とする 180° の回転（半回転（*half-turn*））である。

同じことだが、T は点 M に関する点対称移動（reflection in a point）である。特に、$QRSP$ は $ABCD$ と合同（congruent）であり、回転は向きを保つので、Q, R, S, P も反時計回りに並ぶ。4 つの垂心は、複素数 $a + b + c + d$ で表される点を中心とする単位円上にある。これは A, B, C, D を通る円の像である。



検算

- 小問 (i)：$\theta = 0, \phi = \frac{1}{2}\pi$ とすると $z = (1+\mathrm{i})/(1-\mathrm{i}) = \mathrm{i}$ となり、また $\mathrm{i}\cot\frac{1}{4}\pi = \mathrm{i}$ である。よって $|z| = 1, \arg z = \frac{1}{2}\pi$ である。
- 小問 (iv)：$a = 1, b = \mathrm{i}, c = -1, d = \frac{3}{5} - \frac{4}{5}\mathrm{i}$ とする。すると $m = 0.3 + 0.1\mathrm{i}$ であり、$q = b + c + d = -0.4 + 0.2\mathrm{i}$ となって、主張どおり $2m - a$ に等しい。正方形 $(a, b, c, d = 1, \mathrm{i}, -1, -\mathrm{i})$ の場合は $m = 0$ となり、Q, R, S, P はちょうど C, D, A, B である。つまり半回転の中心は O である。
- 4 つの小問すべてについて、円周上の数千個のランダムな点を用いてコンピュータでも確認した。

よくある間違い

- $\arg z = \frac{1}{2}\pi$ だけを答えること。余接（cotangent）の符号によって $\pm\frac{1}{2}\pi$ のどちらになるかが決まり、また $z = 0$ には偏角がない。
- 小問 (iv) で、頂点の対応の順序を誤ること。A は P ではなく Q に移る。各頂点に対応する垂心は、その頂点を**除いた**三角形の垂心である。
- 写像を中心と角を述べずに「回転」と記述したり、中心を述べずに「倍率 -1 の拡大（enlargement）」と記述したりすること。どちらの記述でもよいが、両方の情報が必要である。

STEP のその先へ

（外心（circumcentre）を原点としたときの）美しい公式 $h = a + b + c$ は、複素数を用いた幾何学という一つの流儀全体の出発点である。たとえば、重心（centroid）は

$\frac{1}{3}(a+b+c)$ であるから、O、重心、H は一直線上にあり、この直線がオイラー線（Euler line）である。小問 (iv) は、円に内接する四角形（cyclic quadrilateral）についての同じ物語の小さな一片である。Tristan Needham の *Visual Complex Analysis*（『ヴィジュアル複素解析』）は、全編を通じて複素数の掛け算を回転と拡大として扱っており、次の一歩として素晴らしい本である。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。