解答例

STEP III 2021、第 6 問

純粋数学 • 逆関数と導関数

STEP III 2021、問 6

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は、OCR が配布している 2021 年の STEP 過去問一式（zip ファイル）のうち、STEP III の問題用紙にある：

www.ocr.org.uk/Images/696588-2021-past-papers.zip

鍵となる考え方

どちらの関数も一見すると手ごわそうだが、その導関数（derivative）は実に単純な形になる。導関数が $\frac{1}{1+x^2}$ である関数は $\tan^{-1} x$ に定数を加えたものでなければならず、導関数がゼロの関数は定数である。ただし、それが言えるのは関数が定義されている各区間（interval）の上だけである。したがって本当の作業は、都合のよい値や極限を用いて、ばらばらの各部分での定数を求めること、そして関数が定義されない点での跳び（jump）に注意することである。

解答

小問 (i)

$t = \tan\alpha$ とおくと $t > 0$ である。さらに $u = \dfrac{xt+1}{t-x}$ とおくと $f_\alpha(x) = \tan^{-1} u$ となる。商の微分法（quotient rule）により

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \frac{t(t-x)+(xt+1)}{(t-x)^2} = \frac{1+t^2}{(t-x)^2},$$

であり、また

$$1+u^2 = \frac{(t-x)^2+(xt+1)^2}{(t-x)^2} = \frac{t^2+x^2+x^2t^2+1}{(t-x)^2} = \frac{(1+t^2)(1+x^2)}{(t-x)^2}.$$

よって合成関数の微分法（chain rule）により

$$f'_\alpha(x) = \frac{1}{1+u^2}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{1+x^2},$$

となり、示すべきことが示された。

考えてみよう これは、ただ1つの定数 c によって $f_\alpha(x) = \tan^{-1} x + c$ と書けるということだろうか？

そうではない。この関数は $x = \tan\alpha$ で定義されないので、定義域（domain）は2つの離れた区間からなる。各区間の上で $f_\alpha(x) - \tan^{-1} x$ の導関数はゼロであるから、それぞれの区間では定数になるが、2つの定数が一致する必要はない。

$x < \tan\alpha$ の場合： $0 < \frac{1}{2}\pi - \alpha < \frac{1}{2}\pi$ であるから、$x = 0$ において $f_\alpha(0) = \tan^{-1}(\cot\alpha) = \frac{1}{2}\pi - \alpha$ となる。したがって

$$f_\alpha(x) = \tan^{-1} x + \tfrac{1}{2}\pi - \alpha \qquad (x < \tan\alpha).$$

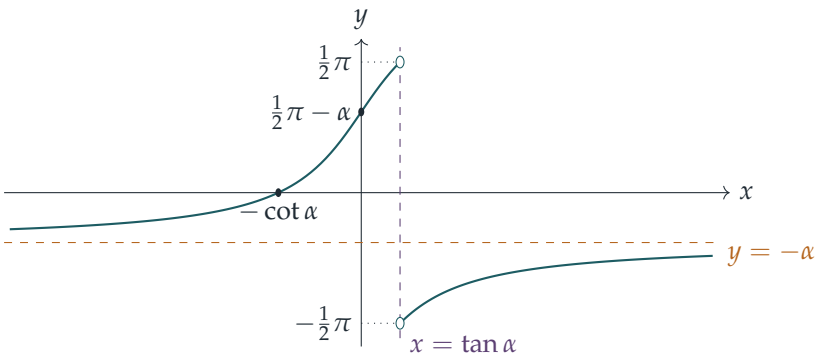
$x > \tan\alpha$ の場合： 上から $x \to \tan\alpha$ とすると、分子 $xt + 1$ は $1 + t^2 > 0$ に近づき、分母 $t - x$ は負の値をとりながら0に近づくので、$u \to -\infty$ となり $f_\alpha(x) \to -\frac{1}{2}\pi$ である。$\tan^{-1} x \to \alpha$ であるから、定数は $-\frac{1}{2}\pi - \alpha$ となる：

$$f_\alpha(x) = \tan^{-1} x - \tfrac{1}{2}\pi - \alpha \qquad (x > \tan\alpha).$$

（下から同様に極限をとると $u \to +\infty$ となり、値 $\frac{1}{2}\pi$ が得られる。これは最初の式と一致する。）

したがってグラフは、$y = \tan^{-1} x$ のグラフを2つに分け、一方を $\frac{1}{2}\pi - \alpha$ だけ上へ、他方を $\frac{1}{2}\pi + \alpha$ だけ下へ平行移動したものである。その特徴は次のとおりである：

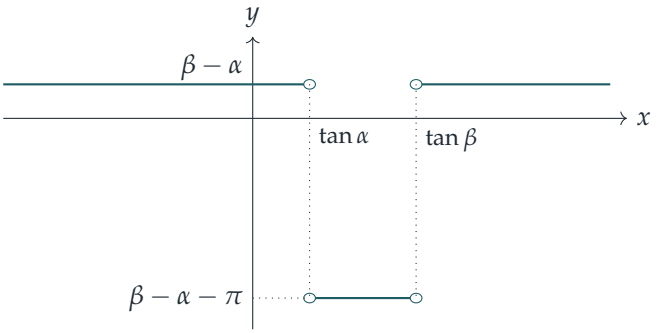
- 各部分で増加し、傾きは $\frac{1}{1+x^2}$ である；
- $x \to \pm\infty$ のとき $y \to -\alpha$ であり（左側では上から、右側では下から近づく）、したがって $y = -\alpha$ は両端での漸近線（asymptote）である；
- 左側の部分は $-\alpha$ から、$x = \tan\alpha$ における $\frac{1}{2}\pi$（この値はとらない）まで上がっていき、y 軸と $\frac{1}{2}\pi - \alpha$ で交わり、x 軸とは $\tan^{-1} x = \alpha - \frac{1}{2}\pi$ となる点、すなわち $x = -\cot\alpha$ で交わる；
- 右側の部分は $x = \tan\alpha$ において $-\frac{1}{2}\pi$ のすぐ上から始まり、$-\alpha$ に向かって上がっていく。この部分は全体が x 軸より下にある；
- $x = \tan\alpha$ において $-\pi$ の跳びがあり、そこでは両方の部分とも傾きが $\cos^2\alpha$ である。



差について。 $0 < \alpha < \beta < \frac{1}{2}\pi$ であるから $\tan\alpha < \tan\beta$ となり、区間は 3 つになる。それぞれの関数について 2 つの式を用いると：

- $x < \tan\alpha$ のとき：$f_\alpha(x) - f_\beta(x) = (\frac{1}{2}\pi - \alpha) - (\frac{1}{2}\pi - \beta) = \beta - \alpha$；
- $\tan\alpha < x < \tan\beta$ のとき：$f_\alpha(x) - f_\beta(x) = (-\frac{1}{2}\pi - \alpha) - (\frac{1}{2}\pi - \beta) = \beta - \alpha - \pi$；
- $x > \tan\beta$ のとき：$f_\alpha(x) - f_\beta(x) = (-\frac{1}{2}\pi - \alpha) - (-\frac{1}{2}\pi - \beta) = \beta - \alpha$。

$\tan^{-1} x$ の項は打ち消し合うので、グラフは階段関数（step function）のグラフになる。すなわち水平な直線 $y = \beta - \alpha$（これは 0 と $\frac{1}{2}\pi$ の間にある）であるが、$\tan\alpha$ と $\tan\beta$ の間の区間でだけ π だけ下がって $y = \beta - \alpha - \pi$（これは $-\pi$ と $-\frac{1}{2}\pi$ の間にある）となる。この関数は $x = \tan\alpha$ と $x = \tan\beta$ では定義されない。



小問 (ii)

各項を微分する。$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\tanh^{-1} s = \dfrac{1}{1-s^2}$ であるから

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\tanh^{-1}(\sin x) = \frac{\cos x}{1-\sin^2 x} = \frac{1}{\cos x} = \sec x,$$

であり、また $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\sinh^{-1}s = \dfrac{1}{\sqrt{1+s^2}}$ であるから

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sinh^{-1}(\tan x) = \frac{\sec^2 x}{\sqrt{1+\tan^2 x}} = \frac{\sec^2 x}{\sqrt{\sec^2 x}} = \frac{\sec^2 x}{|\sec x|} = |\sec x|.$$

平方根は正のものをとるので、絶対値（modulus）が現れるのである。よって $g'(x) = \sec x - |\sec x|$ である。$\frac{1}{2}\pi < x < \frac{3}{2}\pi$ では $\cos x < 0$ であるから $|\sec x| = -\sec x$ となり

$$g'(x) = 2\sec x,$$

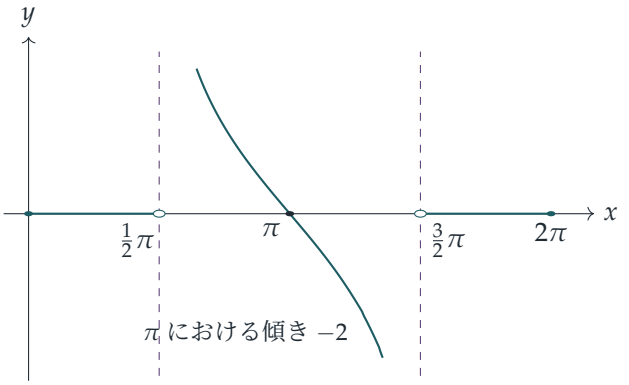
となって、示すべきことが示された。残りの2つの区間 $0 \le x < \frac{1}{2}\pi$ と $\frac{3}{2}\pi < x \le 2\pi$ では $\cos x > 0$ であるから、同じ計算により $g'(x) = 0$ となる。

外側の区間。 ここでは g は各区間で定数である。$g(0) = \tanh^{-1}0 - \sinh^{-1}0 = 0$ であり、同様に $g(2\pi) = 0$ であるから、$0 \le x < \frac{1}{2}\pi$ および $\frac{3}{2}\pi < x \le 2\pi$ において $g(x) = 0$ となる。

中央の区間。 ここでは $g'(x) = 2\sec x < 0$ であるから、g は狭義単調減少（strictly decreasing）である。区間の中点では $g(\pi) = \tanh^{-1}0 - \sinh^{-1}0 = 0$、$g'(\pi) = 2\sec\pi = -2$ である。区間の両端では：

- $x \to \frac{1}{2}\pi^+$ のとき、$\sin x \to 1$ より $\tanh^{-1}(\sin x) \to +\infty$ であり、一方 $\tan x \to -\infty$ より $-\sinh^{-1}(\tan x) \to +\infty$ である。したがって $g(x) \to +\infty$；
- $x \to \frac{3}{2}\pi^-$ のとき、$\sin x \to -1$ かつ $\tan x \to +\infty$ であるから、どちらの項によっても $g(x) \to -\infty$ となる。

また $g''(x) = 2\sec x\tan x$ である。$\frac{1}{2}\pi < x < \pi$ では $\sec x$ も $\tan x$ も負であるから $g'' > 0$ であり、$\pi < x < \frac{3}{2}\pi$ では $\sec x < 0 < \tan x$ であるから $g'' < 0$ である。よって $(\pi, 0)$ は傾き -2 の変曲点（point of inflection）であり、曲線はこの点に関して回転対称（rotational symmetry）である（実際、$g'(2\pi - x) = g'(x)$ かつ $g(\pi) = 0$ である）。さらに、g と $2\tanh^{-1}(\sin x)$ はこの区間で同じ導関数をもち、どちらも π で0になるから、この区間では $g(x) = 2\tanh^{-1}(\sin x) = 2\ln|\sec x + \tan x|$ である。



検算

- $a = 0.6$ とすると、$f_a(0) = \tan^{-1}(\cot 0.6) \approx 0.9708 = \frac{1}{2}\pi - 0.6$ であり、また漸近線から予想されるとおり $f_a(\pm 10^9) \approx -0.6$ である。
- $g(1) = \tanh^{-1}(\sin 1) - \sinh^{-1}(\tan 1) = 1.2261 - 1.2261 = 0$ であり、平らな部分が確かめられる。数千個の無作為な点でコンピュータによる検算を行ったところ、上のすべての式と 10^{-6} 以内で一致した。

よくある間違い

- 全体で 1 つの定数を用いて $f_a(x) = \tan^{-1} x + c$ と書いてしまうこと。導関数がゼロであることから定数であると言えるのは、区間の上だけである。
- $\sqrt{\sec^2 x} = \sec x$ と書いてしまうこと。正しくは $|\sec x|$ であり、この符号こそが、g が 2 つの区間ではゼロになり、3 つ目の区間ではゼロにならない理由のすべてである。

STEP のその先へ

区間の上で導関数がゼロならば定数になるという事実は、平均値の定理（Mean Value Theorem）から導かれる結果であり、両方の小問が示すように、区間でない集合の上では成り立たない。小問 (i) は $\tan^{-1}$ の加法定理（addition formula）とその $\pm\pi$ による補正であり、このような分枝（branch）の帳尻合わせは複素解析（complex analysis）において中心的な役割を果たす。Abbott の *Understanding Analysis*（『解析学を理解する』）には、平均値の定理とその帰結についての丁寧な解説がある。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。