解答例

STEP III 2021、第 5 問

純粋数学 • 極方程式で表された曲線

STEP III 2021、問 5

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は、OCR が配布している 2021 年の STEP 過去問一式（zip ファイル）のうち、STEP III の問題用紙にある：

www.ocr.org.uk/Images/696588-2021-past-papers.zip

鍵となる考え方

どちらの曲線も r が θ の式として与えられているので、2 曲線は r の 2 つの式が一致するところで交わり、さらに $\mathrm{d}r/\mathrm{d}\theta$ の 2 つの値も一致するところで接する（touch）。すべてを $c = \cos\theta$ で表すと、交わる条件は c の二次方程式（quadratic）になる。この二次方程式の重解（repeated root）は接する場合の 1 つを与えるが、それだけではない。$\cos\theta$ そのものが $\theta = 0$ と $\theta = \pi$ で停留する（stationary）ので、$c = \pm 1$ における単解（simple root）も θ についての二重零点を与えるのである。

解答

以下では常に $c = \cos\theta$ とおき、

$$f(\theta) = a + 2\cos\theta, \qquad g(\theta) = 2 + \cos 2\theta = 1 + 2\cos^2\theta.$$

とする。すべての θ について $g(\theta) \geq 1$ であるから、2 番目の曲線は原点 O を決して通らない。O 以外では、$r > 0$ である点の角 θ は（2π の整数倍を除いて）一意に定まる。したがって、2 曲線が交わりうるのは r と θ の両方を共有する点だけである。

小問 (i)

2 曲線が交わるのは $f(\theta) = g(\theta)$、すなわち $a + 2c = 1 + 2c^2$ のとき、つまり

$$2\cos^2\theta - 2\cos\theta + 1 - a = 0,$$

のときであり、これが示すべき式である。差に名前をつけておくと便利である：

$$h(\theta) = f(\theta) - g(\theta) = -(2c^2 - 2c + 1 - a).$$

いつ接するか。共有点において、動径と接線（tangent）のなす角 ψ は $\tan\psi = r/\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}$ を満たす。よって、同じ点 (r,θ) を通る2曲線がそこで同じ接線をもつのは、$\mathrm{d}r/\mathrm{d}\theta$ も一致するときであり、そのときに限る。したがって2曲線は $h(\theta) = 0$ かつ $h'(\theta) = 0$ となるところで接する。微分すると

$$h'(\theta) = -2\sin\theta + 2\sin 2\theta = 2\sin\theta\,(2\cos\theta - 1).$$

よって $h'(\theta) = 0$ となるのは、$\cos\theta = \frac{1}{2}$ または $\sin\theta = 0$ のときであり、そのときに限る。

> **考えてみよう** c の二次方程式が重解をもつのは $a = \frac{1}{2}$ のときだけである。では、なぜほかの a の値があるのだろうか。

c についての重解は接するための十分条件であるが、必要条件ではない。写像 $\theta \mapsto \cos\theta$ は $\theta = 0$ と $\theta = \pi$ で停留する。したがって $c = \pm 1$ が根であれば、h はそこで θ について二重零点をもつ。条件 $h' = 0$ は両方の可能性をとらえている。

- $\cos\theta = \frac{1}{2}$ のとき：交わる条件の式に代入すると $\frac{1}{2} - 1 + 1 - a = 0$ となり、$a = \frac{1}{2}$ である。（同じことだが、判別式（discriminant）$4 - 8(1-a)$ は $a = \frac{1}{2}$ のとき0になり、そのとき重解は $c = \frac{1}{2}$ である。）よって $a = \frac{1}{2}$ のとき2曲線は接し、これが示すべきことであった。
- $\theta = 0$、$c = 1$ のとき：$2 - 2 + 1 - a = 0$ が必要なので $a = 1$ である。このとき両曲線上で $r = 3$ となる。
- $\theta = \pi$、$c = -1$ のとき：$2 + 2 + 1 - a = 0$ が必要なので $a = 5$ である。このとき両曲線上で $r = 5 - 2 = 3$ となるので、$r \geq 0$ が成り立つ。

したがって、ほかの2つの値は $a = 1$ と $a = 5$ である。

2番目の曲線の特徴

3つの概形図すべてに $r = 2 + \cos 2\theta$ が含まれるので、ここでまとめて説明しておく。この曲線は $\theta \to -\theta$ でも $\theta \to \pi - \theta$ でも変わらないので、両方の座標軸に関して対称である。r は $\theta = 0, \pi$ における最大値3から $\theta = \pm\frac{1}{2}\pi$ における最小値1まで変化する。これは楕円（ellipse）では**ない**。$\theta = \frac{1}{2}\pi$ の近くで $s = \sin\theta$ とおくと

$$y = r\sin\theta = (3 - 2s^2)s = 3s - 2s^3, \qquad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s} = 3 - 6s^2 = -3 \text{ ここで} s = 1.$$

よって θ が $\frac{1}{2}\pi$ から離れる（そして s が1より小さくなる）と、y は**増加する**。この曲線は $(0, \pm 1)$ でなめらかなくぼみ（dimple）をもち、尖点（cusp）ではない。そこでは $\mathrm{d}r/\mathrm{d}\theta = -2\sin 2\theta = 0$ であり、接線は水平だからである。対照的に、$x = r\cos\theta = c + 2c^3$ は c について増加するので、$(\pm 3, 0)$ の両端は単に丸くなっている。

1 番目の曲線 $r = a + 2\cos\theta$ は $\theta \to -\theta$ で変わらないので、始線（initial line）に関して対称である。$\theta = 0$ で $r = a + 2$、$\theta = \pm\frac{1}{2}\pi$ で $r = a$、そして（$a \geq 2$ のとき）$\theta = \pi$ で $r = a - 2$ となる。$a < 2$ のときは、制約 $r \geq 0$ によって $\cos\theta = -\frac{1}{2}a$ のところで曲線が切れ、その 2 つの方向に沿って O に達する。

小問 (ii)

$a = \frac{1}{2}$ のとき

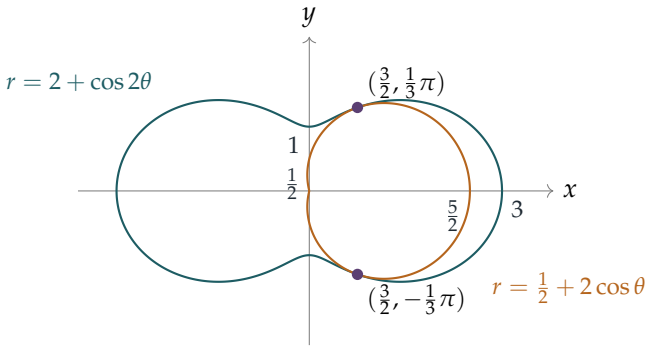
$$h(\theta) = -\left(2c^2 - 2c + \tfrac{1}{2}\right) = -2\left(c - \tfrac{1}{2}\right)^2 \leq 0.$$

よって 1 番目の曲線はいたるところで 2 番目の曲線の内側にあり、$\cos\theta = \frac{1}{2}$ のところでのみ 2 番目の曲線と共有点をもつ。2 曲線は

$$\theta = \pm\tfrac{1}{3}\pi, \qquad r = \tfrac{1}{2} + 1 = \tfrac{3}{2}.$$

で接する。（確認：$2 + \cos\frac{2}{3}\pi = \frac{3}{2}$ であり、$\theta = \frac{1}{3}\pi$ において $\mathrm{d}r/\mathrm{d}\theta$ の値はどちらも $-\sqrt{3}$ である。）

1 番目の曲線は $\cos\theta \geq -\frac{1}{4}$、すなわち $|\theta| \leq \arccos(-\frac{1}{4}) \approx 104.5°$ の範囲にのみ存在する。始線上の $r = \frac{5}{2}$ から、$\theta = \pm\frac{1}{2}\pi$ における $r = \frac{1}{2}$ を経て、O まで至る。直線 $\theta = \pm\arccos(-\frac{1}{4})$ に沿って O に到達するので、原点で角（とがった先端）をもち、それは y 軸のわずかに左側にある。



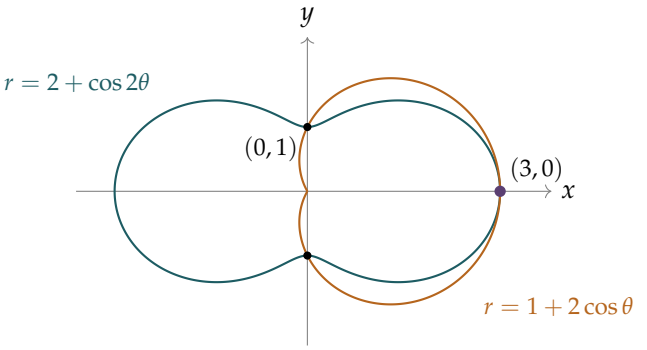
小問 (iii)

$a = 1$ の場合。このとき $h(\theta) = -(2c^2 - 2c) = 2c(1 - c)$ である。2 曲線は $c = 1$ または $c = 0$ のところで交わる。

- 2 曲線は $\theta = 0$、$r = 3$、すなわち点 $(3, 0)$ で接する。$\theta = 0$ の近くでは $0 < c < 1$ なので $h > 0$ であり、接点の両側で 1 番目の曲線は 2 番目の曲線のすぐ外側にある。
- $\theta = \pm\frac{1}{2}\pi$ では両曲線上で $r = 1$ であり、これはくぼみの底にあたる点 $(0, \pm 1)$ であ

る。ここでは h が c とともに符号を変えるので、2曲線は**交差する**。1番目の曲線は $|\theta| < \frac{1}{2}\pi$ では外側に、$|\theta| > \frac{1}{2}\pi$ では内側にある。

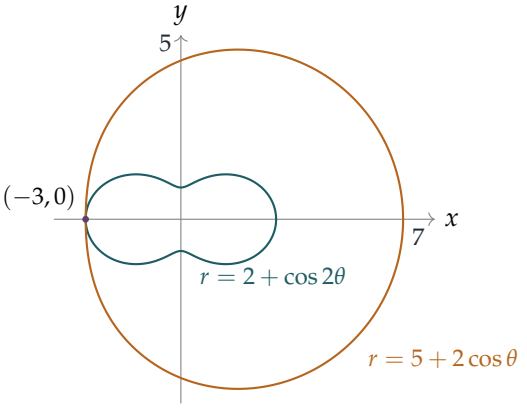
1番目の曲線は $\cos\theta \geq -\frac{1}{2}$、すなわち $|\theta| \leq \frac{2}{3}\pi$ の範囲に存在する。直線 $\theta = \pm\frac{2}{3}\pi$ に沿って O に達し、そこで角をつくる。



$a = 5$ の場合。 このとき $h(\theta) = -(2c^2 - 2c - 4) = 2(2 - c)(1 + c) \geq 0$ であり、等号は $c = -1$ のときのみ成り立つ。よって1番目の曲線は完全に2番目の曲線の外側にあり、

$$\theta = \pi, \qquad r = 3,$$

すなわち点 $(-3, 0)$ でのみ2番目の曲線に接する。$a > 2$ なので、今度は全体で $r > 0$ となり、1番目の曲線は閉じたループ（$a \geq 4$ なので、くぼみのないリマソン（limaçon））になる。$\theta = 0$ で $r = 7$、$\theta = \pm\frac{1}{2}\pi$ で $r = 5$、$\theta = \pi$ で $r = 3$ である。



検算

- 各接点で、r の2つの値と $\mathrm{d}r/\mathrm{d}\theta$ の2つの値を比べる。$a = 1$、$\theta = 0$ では、どちらも $r = 3$ で導関数はどちらも 0 である。$a = 5$、$\theta = \pi$ でも同様である。

- $-3 \leq a < 9$ の範囲を 0.01 刻みで計算機により調べたところ、（$r \geq 0$ のもとで）$h = h' = 0$ となるのは $a = \frac{1}{2}$、1、5 のときだけであった。これは因数分解 $h' = 2\sin\theta(2\cos\theta - 1)$ と一致する。
- 点 $(0,1)$ は 2 番目の曲線上にあり、その近くの $\theta = \frac{1}{2}\pi + 0.1$ の点では $y \approx 1.015 > 1$ となる。これによりくぼみが確認できる。

よくある間違い

- 判別式のところで止まってしまい、$a = 1$ と $a = 5$ を見落とす。$c = \cos\theta$ についての単解でも、θ については重解になりうる。
- $r = 2 + \cos 2\theta$ を楕円として描いてしまう、あるいは $(0, \pm 1)$ になめらかなくぼみではなく尖点を描いてしまう。
- $a = \frac{1}{2}$ や $a = 1$ のときにリマソンの内側のループを描いてしまう。そのループでは $r < 0$ であり、問題文で除外されている。

STEP のその先へ

接するということは、実は重複度（multiplicity）についての主張である。2 曲線が接するのは、それらの方程式の差が曲線に沿って重複した零点をもつところであり、媒介変数表示（parametrisation）によってそのような零点が生じたり隠れたりしうる。ここでの $\cos\theta$ がまさにそうであった。曲線論の最初の講義では、これは接触の位数（order of contact）という概念になり、極方程式で表された曲線の曲率（curvature）$\left(r^2 + 2r'^2 - rr''\right) / \left(r^2 + r'^2\right)^{3/2}$ によって、$2 + \cos 2\theta$ のくぼみがどこから生じるのかが正確に説明される。媒介変数表示された曲線とその幾何についてさらに知りたければ Siklos, *Advanced Problems in Mathematics*（数学の発展問題集）を、なめらかさと接することの背後にある解析については Abbott, *Understanding Analysis*（解析学入門書）を読んでみるとよい。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。