解答例

STEP III 2021、第 4 問

純粋数学 ・ ベクトルと正射影

> **STEP III 2021、問 4**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は、OCR が配布している 2021 年の STEP 過去問一式（zip ファイル）のうち、STEP III の問題用紙にある：
>
> www.ocr.org.uk/Images/696588-2021-past-papers.zip

鍵となる考え方

ここでの議論はすべて内積（scalar product）で行う。2 つのベクトルのなす角は $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = |\mathbf{u}||\mathbf{v}|\cos(\text{なす角})$ から読み取れる。また射影（projection）は線形（linear）であるから、$\frac{1}{2}(\mathbf{a}+\mathbf{b})$ の射影は $\frac{1}{2}(\mathbf{a}_1+\mathbf{b}_1)$ である。小問 (i) では、**長さの等しい** 2 つのベクトルの平均が、それらのなす角を二等分することを示す。小問 (iii) では射影 $\mathbf{a}_1$ と $\mathbf{b}_1$ の長さは一般に異なる。そのため、何か特別なことが起こらない限り二等分は成り立たないと予想すべきである。実際、条件はきれいに因数分解され、2 つの特別な場合に分かれる。

解答

小問 (i)

$|\mathbf{a}| = |\mathbf{b}| = 1$ かつ $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = \cos\theta$ であるから、

$$|\mathbf{m}|^2 = \tfrac{1}{4}\left(1+2\cos\theta+1\right) = \tfrac{1}{2}(1+\cos\theta) = \cos^2\tfrac{\theta}{2},$$

となり、$|\mathbf{m}| = \cos\frac{\theta}{2}$ である。$0<\theta<\pi$ であるから、これは正である。特に $\mathbf{m}\neq\mathbf{0}$ である。また

$$\mathbf{m}\cdot\mathbf{a} = \tfrac{1}{2}(1+\cos\theta) = \cos^2\tfrac{\theta}{2} = \mathbf{m}\cdot\mathbf{b}.$$

である。よって $\mathbf{m}$ と $\mathbf{a}$ のなす角の余弦は $\cos^2\frac{\theta}{2}\big/\cos\frac{\theta}{2} = \cos\frac{\theta}{2}$ であり、$\mathbf{b}$ についても同じことが成り立つ。したがって 2 つの角はともに $\frac{\theta}{2}$ である。$\mathbf{m}$ は $\mathbf{a}$ と $\mathbf{b}$ の張る平面上にあり、2 つの角の和は θ であるから、$\mathbf{m}$ は $\mathbf{a}$ と $\mathbf{b}$ のなす角を二等分する。

小問 (ii)

$\mathbf{c}$ を単位法線ベクトル（unit normal）とし、$\mathbf{a}\cdot\mathbf{c}=\cos\alpha$ とすると、定義より

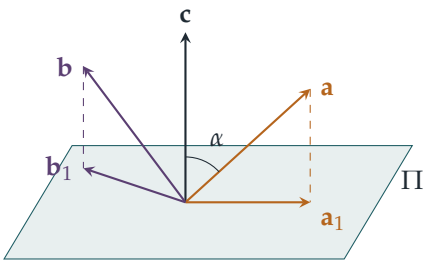
$$\mathbf{a}_1=\mathbf{a}-\cos\alpha\,\mathbf{c},\qquad \mathbf{b}_1=\mathbf{b}-\cos\beta\,\mathbf{c}.$$

である。$|\mathbf{c}|=1$ であるから、$\mathbf{a}_1\cdot\mathbf{c}=\cos\alpha-\cos\alpha\,(\mathbf{c}\cdot\mathbf{c})=0$ となる。同様に $\mathbf{b}_1\cdot\mathbf{c}=0$ である。

$\mathbf{a}_1\cdot\mathbf{c}=0$ であるから $|\mathbf{a}_1|^2=\mathbf{a}_1\cdot(\mathbf{a}-\cos\alpha\,\mathbf{c})=\mathbf{a}_1\cdot\mathbf{a}$ が得られ、さらに

$$\mathbf{a}_1\cdot\mathbf{a}=\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}-\cos\alpha\,(\mathbf{c}\cdot\mathbf{a})=1-\cos^2\alpha=\sin^2\alpha.$$

である。α は鋭角であるから $\sin\alpha>0$ であり、$|\mathbf{a}_1|=\sin\alpha$ となる。同様にして $|\mathbf{b}_1|=\sin\beta$ である。どちらもゼロでないから、角 ϕ は定義される。



射影どうしのなす角については、再び $\mathbf{a}_1\cdot\mathbf{c}=0$ を用いて項を 1 つ消す。

$$\mathbf{a}_1\cdot\mathbf{b}_1=\mathbf{a}_1\cdot(\mathbf{b}-\cos\beta\,\mathbf{c})=\mathbf{a}_1\cdot\mathbf{b}=\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}-\cos\alpha\,(\mathbf{c}\cdot\mathbf{b})=\cos\theta-\cos\alpha\cos\beta.$$

$|\mathbf{a}_1||\mathbf{b}_1|=\sin\alpha\sin\beta$ で割ると

$$\cos\phi=\frac{\cos\theta-\cos\alpha\cos\beta}{\sin\alpha\sin\beta},$$

となり、示すべき式が得られた。

小問 (iii)

射影は線形であるから

$$\mathbf{m}_1=\mathbf{m}-(\mathbf{m}\cdot\mathbf{c})\,\mathbf{c}=\tfrac{1}{2}(\mathbf{a}-\cos\alpha\,\mathbf{c})+\tfrac{1}{2}(\mathbf{b}-\cos\beta\,\mathbf{c})=\tfrac{1}{2}(\mathbf{a}_1+\mathbf{b}_1).$$

である。$\mathbf{m}_1\neq\mathbf{0}$ と仮定する。そうでなければ向きをもたず、何も二等分できないからである。$\mathbf{m}_1$ は $\mathbf{a}_1$ と $\mathbf{b}_1$ の正の係数による一次結合であるから、それらの張る平面上にあり、かつ両者の間にある。よって、このベクトルが角を二等分するのは、$\mathbf{a}_1$ と $\mathbf{b}_1$ のそれぞれと等しい角をなすとき、かつそのときに限る。すなわち

$$\frac{\mathbf{m}_1\cdot\mathbf{a}_1}{|\mathbf{a}_1|}=\frac{\mathbf{m}_1\cdot\mathbf{b}_1}{|\mathbf{b}_1|}.$$

である。（共通因数 $|\mathbf{m}_1|$ を約し、また cos が $[0, \pi]$ 上で単射（one-to-one）であることを用いた。）

考えてみよう なぜ単純に小問 (i) を $\mathbf{a}_1$ と $\mathbf{b}_1$ に適用しないのか？

小問 (i) では $|\mathbf{a}| = |\mathbf{b}|$ が必要であった。ここでは $|\mathbf{a}_1| = \sin\alpha$、$|\mathbf{b}_1| = \sin\beta$ であり、これらは一般に異なる。したがって計算する必要がある。

$P = \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{b}_1$、$s = \sin\alpha$、$t = \sin\beta$ とおく。すると

$$\mathbf{m}_1 \cdot \mathbf{a}_1 = \tfrac{1}{2}(s^2 + P), \qquad \mathbf{m}_1 \cdot \mathbf{b}_1 = \tfrac{1}{2}(P + t^2).$$

である。両辺に $2st > 0$ を掛けると、条件は次のようになる。

$$\begin{aligned} t(s^2 + P) = s(t^2 + P) &\iff st(s - t) - P(s - t) = 0 \\ &\iff (s - t)(st - P) = 0. \end{aligned}$$

よって、$\mathbf{m}_1$ が角を二等分するための必要十分条件は、$s = t$ または $P = st$ である。

- $s = t$ は $\sin\alpha = \sin\beta$ を意味する。sin は $(0, \frac{\pi}{2})$ 上で狭義単調増加（strictly increasing）であり、2 つの角はともに鋭角であるから、これは $\alpha = \beta$ と同値である。
- 小問 (ii) より $P = \cos\theta - \cos\alpha\cos\beta$ である。よって $P = st$ は次を意味する。

$$\cos\theta = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta = \cos(\alpha - \beta).$$

各段階はすべて同値変形であったから、$\mathbf{m}_1$ が $\mathbf{a}_1$ と $\mathbf{b}_1$ のなす角を二等分するための必要十分条件は、$\alpha = \beta$ または $\cos\theta = \cos(\alpha - \beta)$ である。

幾何学的には、第 1 の場合は $\mathbf{a}_1$ と $\mathbf{b}_1$ の長さが等しいことを意味し、結局は小問 (i) が適用できる。第 2 の場合は $\cos\phi = 1$ を意味する。すなわち、射影どうしが同じ向きを向く（$\mathbf{a}$、$\mathbf{b}$、$\mathbf{c}$ が同一平面上にあり、$\mathbf{a}$ と $\mathbf{b}$ が $\mathbf{c}$ に関して同じ側にあるとき）。このとき角はゼロであり、自明に二等分される。

検算

- $\alpha = \beta = \frac{\pi}{2}$ とする（ここでは許されないが、有用な極限である）。このとき $\mathbf{a}$ と $\mathbf{b}$ はすでに平面上にあり、公式はあるべきとおり $\cos\phi = \cos\theta$ を与える。
- $\alpha = \frac{\pi}{3}$、$\beta = \frac{\pi}{4}$、$\theta = \frac{\pi}{2}$ のとき、公式は $\cos\phi = -\frac{\sqrt{2}/4}{\sqrt{6}/4} = -1/\sqrt{3} \approx -0.577$ を与える。これはベクトルを具体的に構成して求めた結果と一致する。
- $\cos\phi$ の公式と、因数分解した二等分の条件は、いずれも数千組のランダムな単位ベクトルの 3 つ組についてコンピュータで確認した。

よくある間違い

- $|\mathbf{a}_1| \neq 1$ であることを忘れる。単位ベクトルの射影は単位ベクトルではないので、分母の $\sin\alpha \sin\beta$ は欠かせない。
- $\mathbf{a}_1, \mathbf{b}_1$ のなす角の二等分線が常に $\mathbf{a}_1 + \mathbf{b}_1$ であると思い込む。これは長さが等しいときにしか成り立たない。一般には、二等分線は $\mathbf{a}_1/|\mathbf{a}_1| + \mathbf{b}_1/|\mathbf{b}_1|$ である。
- 因数分解せずに $\sin\alpha - \sin\beta$ で割ってしまい、$\alpha = \beta$ の場合を落とす。

STEP のその先へ

平面への射影は**線形写像**（linear map）$\mathbf{x} \mapsto \mathbf{x} - (\mathbf{x}\cdot\mathbf{n})\mathbf{n}$ であり、その行列は $I - \mathbf{n}\mathbf{n}^{\mathsf{T}}$ である。線形写像は和を保つが、長さや角は保たない。この問題がこのような結果になるのはそのためである。$\cos\phi$ の公式は、球面三角法の余弦定理（spherical cosine rule）が姿を変えたものである。ここで ϕ は、頂点を $\mathbf{a}$、$\mathbf{b}$、$\mathbf{c}$ とし、辺の長さが α、β、θ である球面三角形の、頂点 $\mathbf{c}$ における角である。射影と直交性については、Strang, *Introduction to Linear Algebra*（線形代数の入門書）を参照のこと。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。