解答例

STEP III 2021、第 3 問

純粋数学 • 積分の不等式

STEP III 2021、問 3

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は、OCR が配布している 2021 年の STEP 過去問一式（zip ファイル）のうち、STEP III の問題用紙にある：

www.ocr.org.uk/Images/696588-2021-past-papers.zip

鍵となる考え方

n 乗されているものを微分せよ。$u = \sec x + \tan x$ とおくと、その導関数（derivative）は $u \sec x$ であり、これによって $u^{n-1}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$ はちょうど積分できる形になる。したがって、なすべきことは $I_{n+1} + I_{n-1}$ の被積分関数（integrand）をこの形に書き直すことである。不等式（inequality）のほうは、被積分関数 $u^n = u^{n-1} \cdot u$ を、ちょうど積分できる $u^{n-1} \cdot u'$ と比較することから得られる。すなわち、$u < u'$ ならば、積分は $[u^n/n]$ より小さい。

解答

小問 (i)

$u = \sec x + \tan x$ とおく。このとき

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \sec x \tan x + \sec^2 x = \sec x\left(\sec x + \tan x\right) = u \sec x.$$

また、$\tan^2 x + 1 = \sec^2 x$ を用いると

$$u^2 + 1 = \sec^2 x + 2\sec x \tan x + \tan^2 x + 1 = 2\sec^2 x + 2\sec x \tan x = 2u \sec x = 2\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}.$$

よって $n \geq 1$ に対して

$$\begin{aligned} I_{n+1} + I_{n-1} &= \int_0^\beta u^{n-1}\left(u^2+1\right)\mathrm{d}x = 2\int_0^\beta u^{n-1}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x = \frac{2}{n}\Big[u^n\Big]_0^\beta \\ &= \frac{2}{n}\left((\sec\beta + \tan\beta)^n - 1\right), \end{aligned}$$

となる。ここで $x = 0$ において $u = 1$ であることを用いた。両辺を半分にすれば、求める恒等式（identity）が得られる。

考えてみよう 恒等式には I_{n+1} と I_{n-1} が現れるが、不等式は I_n に関するものである。真ん中の項をどうすれば挟み込めるだろうか。

u^2+1 と $2u$ を比較する。$u^2+1-2u=(u-1)^2\geq 0$ であり、$0<x\leq\beta$ では $\sec x>1$ かつ $\tan x>0$ であるから $u>1$ となり、そこでは不等式は狭義に成り立つ。両辺に $u^{n-1}>0$ を掛けると $(0,\beta]$ 上で $u^{n+1}+u^{n-1}>2u^n$ が得られ、これを積分すると（被積分関数は連続であり、不等式は正の長さをもつ区間上で狭義に成り立つから）

$$I_{n+1}+I_{n-1}>2I_n, \qquad \text{よって} \qquad I_n<\tfrac{1}{2}\left(I_{n+1}+I_{n-1}\right)=\frac{1}{n}\left((\sec\beta+\tan\beta)^n-1\right).$$

（同じことであるが、$x>0$ に対して $u'-u=u(\sec x-1)>0$ であるから、$I_n=\int_0^\beta u^{n-1}u\,\mathrm{d}x<\int_0^\beta u^{n-1}u'\,\mathrm{d}x$ となる。小問 (ii) にそのまま引き継がれるのは、こちらの見方である。）

小問 (ii)

$c=\cos\beta$ とおくと $0<c<1$ である。$v=c\sec x+\tan x$ とおく。このとき

$$v'=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}=c\sec x\tan x+\sec^2 x.$$

端点では $v(0)=c=\cos\beta$、$v(\beta)=1+\tan\beta$ であり、これらはちょうど目標の式に現れる二つの数である。したがって上界は $\frac{1}{n}[v^n]_0^\beta=\int_0^\beta v^{n-1}v'\,\mathrm{d}x$ であり、$[0,\beta]$ 全体で $v<v'$ を示せば十分である。

考えてみよう 小問 (i) では、u^2+1 はちょうど $2u'$ に等しかった。v についてこれに対応する関係は何だろうか。

小問 (i) の計算を繰り返すと

$$v^2+1=c^2\sec^2 x+2c\sec x\tan x+\tan^2 x+1=(1+c^2)\sec^2 x+2c\sec x\tan x,$$

であるから

$$2v'-(v^2+1)=(1-c^2)\sec^2 x=\sin^2\beta\,\sec^2 x.$$

もはや等式ではないが、残った項は正である。$v^2+1-2v=(v-1)^2$ と合わせると

$$2(v'-v)=(v-1)^2+\sin^2\beta\,\sec^2 x>0,$$

となる。$0<\beta<\frac{\pi}{2}$ では $\sin\beta\neq 0$ だからである。ゆえに、すべての $x\in[0,\beta]$ に対して $v<v'$ が成り立つ。

最後に、$[0,\beta]$ 上で $v>0$ である（$c>0$、$\sec x>0$、$\tan x\geq 0$ だから）。よって $v^{n-1}>0$ であり、$v^n=v^{n-1}v<v^{n-1}v'$ が成り立つ。$[0,\beta]$ 上で積分すると、$n\geq 1$ に対して

$$J_n=\int_0^\beta v^n\,\mathrm{d}x<\int_0^\beta v^{n-1}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{n}\Big[v^n\Big]_0^\beta=\frac{1}{n}\left((1+\tan\beta)^n-\cos^n\beta\right),$$

となり、示すべきことが示された。

検算

- $n = 1$ のとき、(i) の恒等式は $\frac{1}{2}(I_2 + \beta) = \sec\beta + \tan\beta - 1$ を意味する。$\beta = 1$ として数値積分すると、両辺とも 2.40822… となる。
- $\beta = 1$、$n = 3$ のとき、数値的には $I_3 \approx 8.774$ に対して上界は 12.863、$J_3 \approx 3.326$ に対して上界は 5.523 である。
- (ii) において形式的に $\cos\beta = 1$ とおくと、J_n は I_n になり、残りの項 $\sin^2\beta\sec^2 x$ は消える。小問 (ii) は、まさに小問 (i) の摂動（perturbation）なのである。

よくある間違い

- 正であることの確認を忘れる。$v < v'$ に v^{n-1} を掛けるには $v^{n-1} > 0$ が必要であり、$v > 0$ が重要なのはそのためである。
- $\leq$ しか主張しない。狭義の不等式を得るには、一点だけでなく、ある区間上で $u > 1$（あるいは $\sin\beta \neq 0$）であることが必要である。
- $v(\beta)$ を不注意に計算する。$\sec\beta\cos\beta = 1$ であり、$1 + \tan\beta$ はここから生じる。

STEP のその先へ

「各点で $0 < f \leq g$ であり、どこかで狭義の不等式が成り立つならば $\int f < \int g$ である」という議論は、積分の単調性（monotonicity of the integral）であり、解析学（analysis）の講義ではリーマン積分（Riemann integral）の定義から注意深く証明される。扱いにくい被積分関数をちょうど微分の形になっているものと比較することは、積分や和を評価する標準的な方法であり、積分判定法（integral test）のような評価にも再び現れる。Abbott の *Understanding Analysis* は、積分とこうした比較の議論を厳密に扱っている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。