解答例

STEP III 2021、第 2 問

純粋数学 ・ 行列式と不等式

> **STEP III 2021、問 2**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は、OCR が配布している 2021 年の STEP 過去問一式（zip ファイル）のうち、STEP III の問題用紙にある：
>
> www.ocr.org.uk/Images/696588-2021-past-papers.zip

鍵となる考え方

x, y, z の各定義式は、分母を払うと a, b, c について**線形**（linear）な方程式になる。このような方程式が三つ集まると、零でない解 (a, b, c) をもつ同次連立一次方程式（homogeneous linear system）ができるので、係数行列は正則でない（singular）、すなわちその行列式（determinant）は 0 でなければならない。この行列式こそ、求めたい x, y, z の対称式そのものである。その後の不等式は、示すべき式を x, y, z で書き直し、平方和に関する基本的な事実と相加相乗平均の不等式（AM–GM）を用いれば得られる。

解答

小問 (i)

a, b, c は相異なるので、どの分母も 0 ではない。分母を払うと

$$x(b-c) = a, \qquad y(c-a) = b, \qquad z(a-b) = c.$$

ここで行列の積を一行ずつ計算すると

$$\begin{aligned} a - xb + xc &= a - x(b-c) = a - a = 0, \\ ya + b - yc &= b - y(c-a) = b - b = 0, \\ -za + zb + c &= c - z(a-b) = c - c = 0, \end{aligned}$$

となり、これが求める行列の等式である。

この 3×3 行列を M とおく。a, b, c は相異なるので、すべてが 0 ということはない。よって M は**零でない**ベクトルを零ベクトルに移す。

考えてみよう なぜこのことから $\det M = 0$ が導かれるのか。

もし $\det M \neq 0$ ならば逆行列 M^{-1} が存在し、$M\mathbf{v} = \mathbf{0}$ の両辺に左から M^{-1} を掛けると $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ となって、$(a,b,c) \neq (0,0,0)$ に矛盾する。したがって $\det M = 0$ である。第1行に関して余因子展開すると

$$\begin{aligned}\det M &= 1\cdot(1+yz) + x(y-yz) + x(yz+z)\\ &= 1 + yz + xy - xyz + xyz + xz\\ &= 1 + xy + yz + zx.\end{aligned}$$

これを 0 とおけば $yz + zx + xy = -1$ を得る。

不等式については、左辺は $x^2+y^2+z^2$ である。恒等式 $(x+y+z)^2 = x^2+y^2+z^2+2(xy+yz+zx)$ を用いると

$$x^2+y^2+z^2 = (x+y+z)^2 - 2(xy+yz+zx) = (x+y+z)^2 + 2 \geq 2,$$

となる。実数 $x+y+z$ の平方は 0 以上だからである。これが求める結果である。

小問 (ii)

ここでは分母はすべて正であり、分母を払うと $x(b+c) = 2a$ などを得る。これらを a, b, c の一次方程式として整理すると

$$\begin{pmatrix} -2 & x & x \\ y & -2 & y \\ z & z & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

（第1行は $-2a + x(b+c) = 0$ を表し、他の行も同様である。）$a, b, c > 0$ よりこのベクトルは零でないので、小問 (i) とまったく同様に行列式は 0 になる：

$$\begin{aligned}0 &= -2(4-yz) - x(-2y-yz) + x(yz+2z)\\ &= -8 + 2yz + 2xy + xyz + xyz + 2xz\\ &= -8 + 2(xy+yz+zx) + 2xyz.\end{aligned}$$

2 で割ると $xyz + yz + zx + xy = 4$ を得る。

一つ目の不等式。要となる工夫は、左辺の各括弧を右辺の対応する括弧で割ることである：

$$\frac{2a+b+c}{b+c} = \frac{2a}{b+c} + 1 = 1 + x,$$

残りの二つも同様である。$(b+c)(c+a)(a+b) > 0$ であるから、示すべき不等式は $(1+x)(1+y)(1+z) > 5$ と同値である。展開して、先ほど証明した結果を用いると

$$(1+x)(1+y)(1+z) = 1 + (x+y+z) + (xy+yz+zx) + xyz = 5 + (x+y+z).$$

x, y, z はすべて正なので、これは 5 より大きい。以上で一つ目の不等式が示された。

二つ目の不等式。同じ計算により、今度は $x+y+z>2$ を示せばよい。$S=x+y+z$ とおく。

> **考えてみよう** $xy+yz+zx+xyz=4$ であることはわかっている。このことから、どうすれば S がある程度大きくなければならないと言えるだろうか。

$xy+yz+zx$ と xyz はいずれも S を用いて上から評価できる：

- $S^2-3(xy+yz+zx)=\frac{1}{2}\left[(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2\right]\geq 0$ であるから、$xy+yz+zx\leq\frac{1}{3}S^2$ である。
- 正の数 x, y, z に対する相加相乗平均の不等式により、$xyz\leq\left(\frac{1}{3}S\right)^3=\frac{1}{27}S^3$ である。

これらを足し合わせると

$$4=xy+yz+zx+xyz\leq\frac{1}{3}S^2+\frac{1}{27}S^3.$$

右辺は $S>0$ において S の増加関数（increasing function）であり、$S=3$ のとき $3+1=4$ に等しい。よってもし $S<3$ ならば右辺は 4 より小さくなり、不可能である。ゆえに $S\geq 3$ であり、

$$\frac{(2a+b+c)(a+2b+c)(a+b+2c)}{(b+c)(c+a)(a+b)}=5+S\geq 8>7,$$

となる。これで二つ目の不等式が示された（実際にはより強い評価 8 が得られ、等号は $a=b=c$ のとき成り立つ）。

検算

- 小問 (ii) で $a=b=c=1$ とすると、左辺の分子は $4^3=64$、$(b+c)(c+a)(a+b)=8$ なので比は 8 となり、$x=y=z=1, S=3$ のときの $5+S$ と一致する。また $xyz+xy+yz+zx=1+3=4$ である。
- 小問 (i) で $(a,b,c)=(0,1,2)$ とすると、$x=0, y=\frac{1}{2}, z=-2$ であり、確かに $xy+yz+zx=-1$ となる。平方和は $\frac{17}{4}\geq 2$ である。
- 20 000 組の無作為な有理数の三つ組についてコンピュータで確かめたところ、二つの恒等式はいずれも厳密に成り立った。小問 (ii) で見つかった比の最小値は約 8.0001 であり、$a=b=1, c=10^{-6}$ のときは約 9.0 であった。よって 8 が真の最小値であり、7 を余裕をもって上回っている。

よくある間違い

- 理由を述べずに $\det M = 0$ と主張すること。要点は (a, b, c) が**零でない**ベクトルであることで、そのためには小問 (i) では「相異なる」、小問 (ii) では「正である」という条件が必要である。
- $2a + b + c$ を $b + c$ で割って、$1 + x$ ではなく $1 + \frac{1}{2}x$ としてしまうこと。x にはすでに因数 2 が含まれていることに注意せよ。
- $xy + yz + zx < 4$（**上からの**評価）を使って S を下から評価しようとすること。上で行ったように、不等式の向きは逆でなければならない。

STEP のその先へ

正方行列が零でないベクトルを零ベクトルに移すのは、その行列式が 0 であるとき、かつそのときに限る。この事実は線形代数（linear algebra）の核心であり、固有値（eigenvalue）は $\det(A - \lambda I) = 0$ を通してまさにこの方法で求められる。小問 (ii) の評価 $S \geq 3$ は、ネスビットの不等式（Nesbitt's inequality）$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}$ が姿を変えたものである。線形代数については Strang, *Introduction to Linear Algebra*（線形代数入門）を参照されたい。この種の不等式をさらに学ぶには、Siklos, *Advanced Problems in Mathematics*（数学の発展問題集）が優れた演習となる。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。