解答例

STEP III 2021、第 10 問

力学 ・ 巻きつく糸の運動

STEP III 2021、問 10

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は、OCR が配布している 2021 年の STEP 過去問一式（zip ファイル）のうち、STEP III の問題用紙にある：

www.ocr.org.uk/Images/696588-2021-past-papers.zip

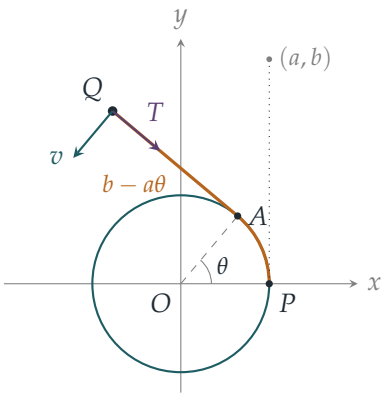
鍵となる考え方

すべてを、糸の直線部分が回転した角 θ で記述する。糸は接線（tangent）に沿って円柱から離れるので、質点の位置は接点に長さ $b - a\theta$ の接線方向のベクトルを加えたものになる。微分すると、質点の速度は常に糸と直交することがわかる。したがって張力（tension）は仕事をせず、速さは変化しない。各瞬間において、質点は糸が円柱から離れる点を中心とする円の上を運動しており、張力が向心力（centripetal force）を与えている。

解答

質点を、なめらかな水平の台の上を動く点としてモデル化する。このとき質点にはたらく水平方向の力は、軽くて伸びない糸の張力 T だけである（重力は台からの垂直抗力とつり合っている）。糸は終始ぴんと張っているものとする。

糸が円柱に巻きつくためには、撃力（impulse）によって質点が (a, b) から x 軸の負の向きに打ち出されなければならない。したがって糸は反時計回りに回転する。時刻 t において、糸の直線部分が円柱から離れる点を A とする。



小問 (i)

P への半径が θ だけ回転しているので、点 A は $(a\cos\theta, a\sin\theta)$ である。円柱に巻きついた糸の長さは弧 PA の長さ $a\theta$ に等しいので、直線部分の長さは $b - a\theta$ である。直線部分は A における接線に沿って、θ が増加する向きに伸びており、その向きの単位ベクトルは $(-\sin\theta, \cos\theta)$ である（$\theta = 0$ のときこれは $(0,1)$ となり、初期位置 (a,b) と一致する）。よって質点の位置は

$$x = a\cos\theta - (b - a\theta)\sin\theta, \qquad y = a\sin\theta + (b - a\theta)\cos\theta.$$

である。積の微分法（product rule）と $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(b - a\theta) = -a\dot{\theta}$ を用いて t で微分すると、

$$\dot{x} = -a\dot{\theta}\sin\theta + a\dot{\theta}\sin\theta - (b - a\theta)\dot{\theta}\cos\theta = -(b - a\theta)\dot{\theta}\cos\theta,$$
$$\dot{y} = a\dot{\theta}\cos\theta - a\dot{\theta}\cos\theta - (b - a\theta)\dot{\theta}\sin\theta = -(b - a\theta)\dot{\theta}\sin\theta.$$

となる。したがって $\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = (b - a\theta)^2\dot{\theta}^2$ であり、$b - a\theta > 0$ かつ $\dot{\theta} > 0$（糸は巻きついていく）であるから、速さは

$$v = (b - a\theta)\dot{\theta}.$$

である。

小問 (ii)

> **考えてみよう** なぜ速さは u のままでなければならないのか。糸は終始質点を引っ張っているではないか。

小問 (i) より、速度は $-(b - a\theta)\dot{\theta}\,(\cos\theta, \sin\theta)$ であり、これは半径 OA に平行である。したがって、方向が $(-\sin\theta, \cos\theta)$ である糸と垂直である。張力は糸に沿ってはたらくので、張力がする仕事の仕事率 $\mathbf{T}\cdot\mathbf{v}$ は各瞬間において 0 である。ほかに水平方向の

力ははたらかないので、運動エネルギー（kinetic energy）、したがって速さは一定である。最初の速さは u であるから、

$$\dot{\theta}\,(b - a\theta) = u,$$

が成り立ち、題意が示された。

小問 (iii)

(ii) を用いると、速度は u を定数として $\mathbf{v} = -u(\cos\theta, \sin\theta)$ であるから、加速度は

$$\dot{\mathbf{v}} = -u\dot{\theta}(-\sin\theta, \cos\theta).$$

である。この大きさは $u\dot{\theta}$ であり、向きは質点から A へ向かう向き、すなわちちょうど糸に沿った向きである（言い換えれば、各瞬間において質点は A を中心とする半径 $b - a\theta$ の円の上を速さ u で運動しているので、その加速度は A へ向かって $u^2/(b - a\theta)$ である）。糸に沿った方向にニュートン（Newton）の運動の第 2 法則を適用すると

$$T = mu\dot{\theta} = \frac{mu^2}{b - a\theta}.$$

を得る。あとは $b - a\theta$ を t で表せばよい。$t = 0$ で $\theta = 0$ であることを用いて (ii) を t で積分すると

$$b\theta - \tfrac{1}{2}a\theta^2 = ut.$$

となる。すると

$$(b - a\theta)^2 = b^2 - 2a\left(b\theta - \tfrac{1}{2}a\theta^2\right) = b^2 - 2aut,$$

であり、$b - a\theta > 0$ であるから正の平方根をとって $b - a\theta = \sqrt{b^2 - 2aut}$ である。したがって

$$T = \frac{mu^2}{\sqrt{b^2 - 2aut}},$$

となり、題意が示された。

検算

- $t = 0$ において張力は mu^2/b である。質点は P を中心とする半径 b の円の上を速さ u で動き始めるので、予想どおりである。
- 糸が完全に巻き取られるのは $a\theta = b$ のときであり、それは $t = b^2/(2au)$ のときに起こる。このとき $b^2 - 2aut = 0$ となり、張力は限りなく大きくなる。速さが一定のまま、瞬間的な円の半径が 0 に縮んでいくからである。
- 次元：b^2 と aut はどちらも面積であり、mu^2/長さ は力である。

- 結果はコンピュータでも確認した。a、b、u、m をいくつか無作為に選び、運動を数値的に追跡して位置を数値微分したところ、速さは u のまま保たれ、糸に沿った力の測定値は相対誤差およそ 3×10^{-5} で $mu^2/\sqrt{b^2 - 2aut}$ と一致した。

よくある間違い

- O のまわりの角運動量（angular momentum）が保存されると仮定してしまう。これは誤りである。張力は円柱の接線に沿ってはたらき、その接線は O を通らないので、張力は O のまわりにモーメントをもつ。ここで保存されるのはエネルギーである。
- すでに円柱に巻きついた糸を忘れて、直線部分の長さとして $b - a\theta$ ではなく b を用いてしまう。
- 張力の計算において、曲率半径（radius of curvature）として直線部分の長さ AQ ではなく、質点の経路の半径 OQ を用いてしまう。

STEP のその先へ

曲線から巻きほどかれる（あるいは曲線に巻きつく）糸の端点が描く軌跡は**伸開線**（involute、インボリュート）とよばれる。円の伸開線は、ほとんどの歯車の歯形に用いられている形である。かみ合う歯車が運動をなめらかに伝えるようになるからである。この問題は、大学 1 年次の力学で学ぶ一般的な原理の例にもなっている。すなわち、速度に垂直な束縛力は仕事をしないので、運動量や角運動量が保存されない場合でもエネルギーは保存されうる。Kleppner and Kolenkow, *An Introduction to Mechanics*（力学入門）には、まさにこの種の問題についての優れた議論がある。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。