解答例

STEP III 2021、第 1 問

純粋数学 • 媒介変数表示された曲線の法線

STEP III 2021、問 1

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は、OCR が配布している 2021 年の STEP 過去問一式（zip ファイル）のうち、STEP III の問題用紙にある：

www.ocr.org.uk/Images/696588-2021-past-papers.zip

鍵となる考え方

どちらの小問も同じ手順で進む。媒介変数表示（parametric equations）を微分し、$\mathrm{d}y/\mathrm{d}x$ の逆数に負号をつけて法線（normal）の傾き（gradient）を求め、そのあと方程式を整理する。面白いのはこの整理の部分である。両辺に掛けて分数を払うと、三角関数の項がまとまって、短く対称な直線の方程式になる。直線が $x\sin\phi + y\cos\phi = \ldots$ や $x\cos\phi + y\sin\phi = \ldots$ の形になれば、その幾何学的な性質（切片や原点からの距離）は一目で読み取れる。

解答

小問 (i)

t で微分すると、

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 12\cos^2 t\,\sin t, \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = 12\cos t - 12\sin^2 t\cos t = 12\cos t\,(1-\sin^2 t) = 12\cos^3 t.$$

よって、$0 < t < \frac{1}{2}\pi$（このとき $\sin t$ と $\cos t$ は 0 でない）において

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{12\cos^3 t}{12\cos^2 t\sin t} = \frac{\cos t}{\sin t}.$$

$t = \phi$ における接線（tangent）の傾きは $\cot\phi$ であるから、法線の傾きは $-\tan\phi = -\dfrac{\sin\phi}{\cos\phi}$ である。したがって法線は

$$y - 12\sin\phi + 4\sin^3\phi = -\frac{\sin\phi}{\cos\phi}(x + 4\cos^3\phi).$$

両辺に $\cos\phi$ を掛け、x と y の項を左辺にまとめると、

$$\begin{aligned} x\sin\phi + y\cos\phi &= 12\sin\phi\cos\phi - 4\sin^3\phi\cos\phi - 4\cos^3\phi\sin\phi \\ &= 12\sin\phi\cos\phi - 4\sin\phi\cos\phi\,(\sin^2\phi + \cos^2\phi) \\ &= 8\sin\phi\cos\phi. \end{aligned}$$

よって法線は

$$\boxed{x\sin\phi + y\cos\phi = 8\sin\phi\cos\phi} \qquad \text{あるいは同値な形で} \qquad \frac{x}{\cos\phi} + \frac{y}{\sin\phi} = 8.$$

2 番目の形から、法線は座標軸と $(8\cos\phi, 0)$ および $(0, 8\sin\phi)$ で交わることがわかる。

接すること。 $P = (8\cos^3\phi,\ 8\sin^3\phi)$ とおく。示すべきことは 3 つある。

P が曲線 $x^{2/3} + y^{2/3} = 4$ 上にあること。 $0 < \phi < \frac{1}{2}\pi$ より両座標は正であるから、実数の立方根はそれぞれ $2\cos\phi$ と $2\sin\phi$ である。よって $x^{2/3} + y^{2/3} = 4\cos^2\phi + 4\sin^2\phi = 4$ となる。

P が法線上にあること。 代入すると、

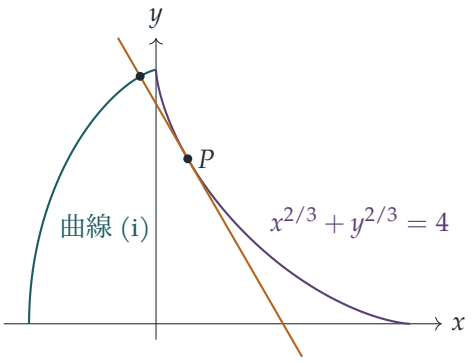
$$8\cos^3\phi\sin\phi + 8\sin^3\phi\cos\phi = 8\sin\phi\cos\phi\,(\cos^2\phi + \sin^2\phi) = 8\sin\phi\cos\phi.$$

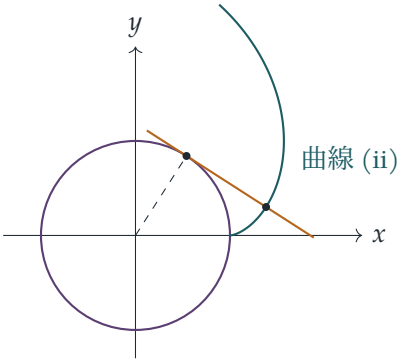
P において傾きが一致すること。 $x^{2/3} + y^{2/3} = 4$ を陰関数微分（implicit differentiation）すると（$x, y > 0$ で有効）、

$$\tfrac{2}{3}x^{-1/3} + \tfrac{2}{3}y^{-1/3}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 0 \quad\Longrightarrow\quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{y^{1/3}}{x^{1/3}} = -\frac{2\sin\phi}{2\cos\phi} = -\tan\phi \ \text{ 点}P,$$

となり、これは点 P における値として法線の傾きにちょうど一致する。

曲線上の点を通り、その点での曲線の傾きと同じ傾きをもつ直線は、その点における接線である。よって法線は $x^{2/3} + y^{2/3} = 4$ に P で接する。これが示すべきことであった。





どちらの図でも、曲線（青緑）上の点における法線（琥珀色）が第 2 の曲線（紫）に接している。いずれも ϕ のある特定の値について描いたものである。

小問 (ii)

t で微分すると（$t\sin t$ と $t\cos t$ の項には積の微分法（product rule）を用いる）、

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -\sin t + \sin t + t\cos t = t\cos t, \qquad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \cos t - \cos t + t\sin t = t\sin t.$$

$0 < t < \frac{1}{2}\pi$ では $t\cos t \neq 0$ であるから、$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \dfrac{t\sin t}{t\cos t} = \tan t$ である。$t = \phi$ における法線の傾きは $-\cot\phi = -\dfrac{\cos\phi}{\sin\phi}$ であり、その方程式は

$$y - \sin\phi + \phi\cos\phi = -\frac{\cos\phi}{\sin\phi}(x - \cos\phi - \phi\sin\phi).$$

両辺に $\sin\phi$ を掛けると、

$$y\sin\phi - \sin^2\phi + \phi\sin\phi\cos\phi = -x\cos\phi + \cos^2\phi + \phi\sin\phi\cos\phi.$$

$\phi\sin\phi\cos\phi$ の項は打ち消し合い、$\sin^2\phi + \cos^2\phi = 1$ であるから、

$$\boxed{x\cos\phi + y\sin\phi = 1}.$$

考えてみよう 垂線の足を求めずに、原点から直線までの距離を求めるにはどうすればよいか。

点 (x_0, y_0) から直線 $ax + by = c$ までの距離は $\dfrac{|ax_0 + by_0 - c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ である。ここでは $(x_0, y_0) = (0, 0)$、$a = \cos\phi$、$b = \sin\phi$、$c = 1$ であるから、距離は

$$\frac{|-1|}{\sqrt{\cos^2\phi + \sin^2\phi}} = 1.$$

直接見ることもできる。$(\cos\phi, \sin\phi)$ は直線に垂直な単位ベクトル（unit vector）であり、点 $(\cos\phi, \sin\phi)$ 自身がこの方程式を満たす。よって O からの垂線の足（foot of the perpendicular）は $(\cos\phi, \sin\phi)$ であり、距離は 1 である。

曲線。ϕ の値によらず、どの法線も原点からの距離が 1 である。O からの距離が 1 の直線は、O を中心とする半径 1 の円と垂線の足でのみ交わり、そこで半径と垂直である。したがってその直線は円の接線である。よってどの法線も

$$\boxed{x^2 + y^2 = 1},$$

に接し、接点は $(\cos\phi, \sin\phi)$ である。

検算

- (i) で $\phi = \frac{1}{3}\pi$ とする。曲線上の点は $(-\frac{1}{2},\ 6\sqrt{3} - \frac{3}{2}\sqrt{3}) = (-0.5,\ 7.794)$ であり、法線 $2x + \frac{2}{\sqrt{3}}y = 8$ は座標軸と $(4, 0)$ および $(0, 4\sqrt{3}) \approx (0, 6.928)$ で交わる。点 $P = (1,\ 3\sqrt{3}) \approx (1,\ 5.196)$ は $2 + 6 = 8$ を満たすので法線上にあり、また $1^{2/3} + (3\sqrt{3})^{2/3} = 1 + 3 = 4$ である。
- (ii) で $\phi \to 0$ とすると、曲線は単位円上の点 $(1, 0)$ から始まり、そこでの法線は鉛直な直線 $x = 1$ に近づく。これは確かに $x^2 + y^2 = 1$ の接線である。
- 1000 個のランダムな ϕ の値に対するコンピュータでの検証により、すべての法線の方程式、(i) における接すること、(ii) における距離が 1 であることが、丸め誤差の範囲で確かめられた。

よくある間違い

- (i) で $\mathrm{d}y/\mathrm{d}t$ を誤る。$12\cos t - 12\sin^2 t \cos t$ は $12\cos^3 t$ に簡約され、この因数分解こそが傾きをこれほど簡単にしている。
- (i) で P が法線上にあることだけを確かめる。曲線上の点を通る直線が、その点で自動的に接線になるわけではない。傾きも一致しなければならない。
- (ii) で、方程式・中心・半径を示さずに「円」とだけ答える。

STEP のその先へ

曲線のすべての法線の包絡線（envelope）を、その曲線の**縮閉線**（evolute）という。これは曲率中心（centre of curvature）の軌跡である。したがって小問 (i) は、星形線（アステロイド、astroid）$x^{2/3} + y^{2/3} = 4$ が第 1 の曲線の縮閉線であることを示している。(ii) の曲線は単位円の**伸開線**（involute）（糸巻きからぴんと張った糸をほどいていくとき、糸の端が描く軌跡）であり、その縮閉線は円である。円の伸開線は、ほとんどの歯車の歯の形を与える。これらの考え方は曲線の微分幾何学（differential geometry）に属する。Needham の *Visual Complex Analysis* は、このような平面曲線についての推論に寄り添う、美しく幾何学的な一冊である。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。