解答例

# STEP II 2021、第 9 問

力学 ・ 静力学

**STEP II 2021、問 9**

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は、OCR が配布している 2021 年の STEP 過去問一式（zip ファイル）のうち、STEP II の問題用紙にある：

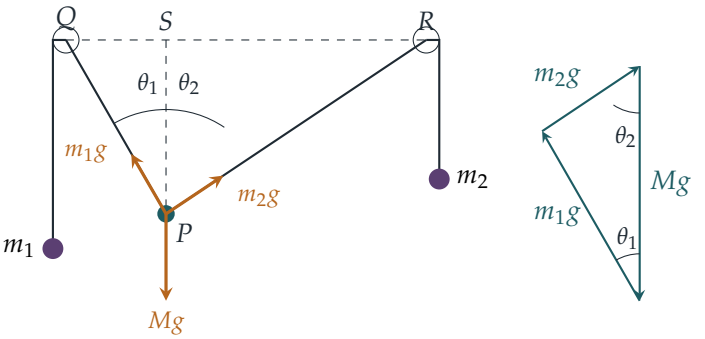
www.ocr.org.uk/Images/696588-2021-past-papers.zip

## 鍵となる考え方

滑車（pulley）は滑らか（smooth）なので、糸の各部分の張力（tension）はその先に吊るされた質点の重さに等しい。したがって、$P$ にはたらく 3 つの力の大きさの比は $m_1 : m_2 : M$ である。これら 3 つの力をつなぎ合わせると閉じた三角形ができ、その辺は $m_1 g$、$m_2 g$、$Mg$、角は $\theta_1$ と $\theta_2$ から作られる。この三角形に余弦定理（cosine rule）を適用すれば、すべてが求まる。不等式は「2 つの角がともに鋭角（acute）であるような三角形が存在する」という条件から得られ、比は $\tan\theta_1$ と $\tan\theta_2$ から得られる。

## 解答

**モデル化**。質点は大きさのない質点（point mass）とし、糸は軽く伸び縮みしない（light and inextensible）ものとし、滑車は小さく滑らかであるとする。よって $PQ$ の張力は $m_1$ を支える鉛直部分の張力に等しく、$m_1$ は釣り合い（equilibrium）の状態にあるから $T_1 = m_1 g$ である。同様に $PR$ の張力は $T_2 = m_2 g$ である。$h = SP$ とおく。



**小問 (i)**

$P$ において水平方向と鉛直方向に分解する（$g$ は約分する）と、

$$m_1 \sin\theta_1 = m_2 \sin\theta_2, \qquad m_1 \cos\theta_1 + m_2 \cos\theta_2 = M. \tag{$*$}$$

同じことだが、3 つの力を矢印の先と根元をつなぐように並べると、辺が $m_1 g$、$m_2 g$、$Mg$ の閉じた三角形ができる（図の右側）。これを力の三角形（triangle of forces）という。辺 $Mg$ は鉛直なので、辺 $Mg$ と辺 $m_1 g$ のなす角は $\theta_1$（辺 $m_2 g$ の対角）であり、$Mg$ と $m_2 g$ のなす角は $\theta_2$（$m_1 g$ の対角）である。残りの角、すなわち $Mg$ の対角は $180^\circ - \theta_1 - \theta_2$ である。

図よりも計算のほうが好みなら、同じ事実は $(*)$ からも得られる。$m_1 \cos\theta_1 = M - m_2 \cos\theta_2$ と $m_1 \sin\theta_1 = m_2 \sin\theta_2$ と書き、両辺を 2 乗して加えると、

$$m_1^2 = M^2 + m_2^2 - 2Mm_2 \cos\theta_2, \quad \text{よって} \quad \cos\theta_2 = \frac{M^2 + m_2^2 - m_1^2}{2Mm_2},$$

となり、2 つの辺の役割を入れ替えれば

$$\cos\theta_1 = \frac{M^2 + m_1^2 - m_2^2}{2Mm_1}.$$

**(a)** $\theta_1 + \theta_2$ は $0^\circ$ より大きく $180^\circ$ より小さいので、力の三角形はつぶれていない本当の三角形である。したがって三角形不等式（triangle inequality）は等号なしで成り立ち、$M < m_1 + m_2$ が得られる。

下からの評価には、$\theta_2$ が鋭角であること、すなわち $\cos\theta_2 > 0$ を用いる。$2Mm_2 > 0$ なので、上の式から

$$M^2 + m_2^2 - m_1^2 > 0 \iff M^2 > m_1^2 - m_2^2 \iff M > \sqrt{m_1^2 - m_2^2},$$

が得られる。最後の変形は $M > 0$ かつ $m_1^2 - m_2^2 > 0$ であるから正しい。以上を合わせて

$$\sqrt{m_1^2 - m_2^2} < M < m_1 + m_2.$$

**考えてみよう** $\theta_1$ に関する条件ではなく、$\theta_2$ に関する条件が効いてくるのはなぜだろうか。

三角形では、大きい辺に向かい合う角ほど大きい。$m_1 > m_2$ なので、角 $\theta_2$（$m_1 g$ の対角）は $\theta_1$（$m_2 g$ の対角）より大きい。よって $\theta_2$ が鋭角でありさえすれば、$\theta_1$ も自動的に鋭角となる。実質的な制約は $\theta_2$ に関するものだけである。（実際、$m_1 > m_2$ なので、すべての $M > 0$ に対して $\cos\theta_1 > 0$ が成り立つ。）

**(b)** $SP = h$ とすると、直角三角形 $QSP$ と $RSP$ において

$$QS = h\tan\theta_1, \qquad SR = h\tan\theta_2.$$

したがって

$$\begin{aligned} r = \frac{QS}{SR} = \frac{\tan\theta_1}{\tan\theta_2} &= \frac{\sin\theta_1}{\sin\theta_2}\cdot\frac{\cos\theta_2}{\cos\theta_1} \\ &= \frac{m_2}{m_1}\cdot\frac{M^2+m_2^2-m_1^2}{2Mm_2}\cdot\frac{2Mm_1}{M^2+m_1^2-m_2^2} \quad ((*)\text{ と余弦の式を用いた}) \\ &= \frac{M^2-m_1^2+m_2^2}{M^2-m_2^2+m_1^2}, \end{aligned}$$

となり、これが求める比である。(a) より分母・分子はともに正なので $r > 0$ であり、$m_1 > m_2$ なので $r < 1$ である。つまり図が示すとおり、点 $S$ は $Q$ に近い側にある。

### 小問 (ii)

力の三角形の辺 $Mg$（その対角は $180^\circ - (\theta_1+\theta_2)$）に対する余弦定理は

$$M^2 = m_1^2 + m_2^2 + 2m_1m_2\cos(\theta_1+\theta_2).$$

となる。（計算で示すなら、$(*)$ の 2 つの式をそれぞれ 2 乗して加えればよい。）$M^2 = m_1^2+m_2^2$ のとき、これより $\cos(\theta_1+\theta_2) = 0$ でなければならない。$\theta_1$ と $\theta_2$ は鋭角なので $0^\circ < \theta_1+\theta_2 < 180^\circ$ であり、可能なのは

$$\theta_1+\theta_2 = 90^\circ.$$

のみである。よって糸は $P$ で直角をなす。（この $M$ の値は (a) の範囲に確かに入っているので、この配置は実現可能である。）

このとき余弦の式は簡単になり、$\cos\theta_1 = \dfrac{2m_1^2}{2Mm_1} = \dfrac{m_1}{M}$、$\cos\theta_2 = \dfrac{m_2}{M}$ となる。$\theta_2 = 90^\circ - \theta_1$ なので $\sin\theta_1 = \cos\theta_2 = m_2/M$ であり、

$$\tan\theta_1 = \frac{m_2}{m_1}, \qquad \tan\theta_2 = \frac{1}{\tan\theta_1} = \frac{m_1}{m_2}.$$

したがって

$$\frac{QR}{SP} = \frac{h\tan\theta_1 + h\tan\theta_2}{h} = \frac{m_2}{m_1}+\frac{m_1}{m_2} = \frac{m_1^2+m_2^2}{m_1m_2},$$

となり、$QR : SP = (m_1^2+m_2^2) : m_1m_2$ である。

## 検算

- $m_1 = 5$、$m_2 = 3$、$M = 6$（$4 < M < 8$ の範囲内）として $(*)$ を数値的に解くと、$\theta_1 \approx 29.93^\circ$、$\theta_2 \approx 56.25^\circ$ となる。このとき $\tan\theta_1/\tan\theta_2 \approx 0.3846 = \frac{5}{13}$ であり、$r = \frac{36-25+9}{36-9+25} = \frac{20}{52}$ と一致する。

- 範囲の端では、$M \to \sqrt{m_1^2 - m_2^2}$ のとき $\theta_2 \to 90^\circ$ かつ $r \to 0$ となり（糸 $PR$ が水平になる）、$M \to m_1 + m_2$ のときは両方の角が 0 に近づき、$P$ は $QR$ のはるか下まで下がる。
- 小問 (ii) で $m_1 = 4$、$m_2 = 3$、$M = 5$ とすると、$\tan\theta_1 = \frac{3}{4}$、$\tan\theta_2 = \frac{4}{3}$、$QR/SP = \frac{25}{12}$ となる。$(*)$ を確かめると、$4 \cdot \frac{3}{5} = 3 \cdot \frac{4}{5}$ かつ $4 \cdot \frac{4}{5} + 3 \cdot \frac{3}{5} = 5$ である。

## よくある間違い

- 力の三角形で $Mg$ の対角を $180^\circ - (\theta_1 + \theta_2)$ ではなく $\theta_1 + \theta_2$ としてしまう。こうすると余弦定理の符号が逆になる。
- 三角形不等式を等号つきで使ってしまう、あるいは下からの評価に角が鋭角であるという条件が必要なことを忘れる。
- 比を逆にしてしまう。$r = QS/SR$ であり、$QS$ は重いほうの質点の側の辺である。

## STEP のその先へ

力の三角形は、ある一般的な事実の最も簡単な場合である。釣り合っている力の和は零ベクトルになるので、それらを先と根元をつなぐように描くと閉じた多角形ができる。技術者はこの考え方（「力の多角形（force polygon）」）を骨組み構造の解析に用いており、大学 1 年の力学では、モーメント（moment）も釣り合うという条件とともに、静力学（statics）のベクトル形式として再び登場する。さらに知りたければ、Kleppner と Kolenkow の *An Introduction to Mechanics*（力学入門）を参照するとよい。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。