解答例

STEP II 2021、第 8 問

純粋数学 • 積分の漸化式

> **STEP II 2021、問 8**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は、OCR が配布している 2021 年の STEP 過去問一式（zip ファイル）のうち、STEP II の問題用紙にある：
>
> www.ocr.org.uk/Images/696588-2021-past-papers.zip

この問題は、*Beyond STEP* の第 2.9 節「*e* に迫る分数」で詳しく解説されている：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/ch02/e-approximations.html

鍵となる考え方

関数 $t^n(1-t)^n$ はただ一つの二次式 $u = t(1-t)$ の累乗であるから、その微分は連鎖律（chain rule）を 2 回使うだけで済む。この関数とその導関数（derivative）はどちらも $t = 0$ と $t = 1$ で消えるので、e^t に対して部分積分（integration by parts）を 2 回行うと境界項（boundary term）はすべて消え、小問 (i) の第 2 次導関数がそのまま漸化式（recurrence）に変わる。積分の値は 0 とごく小さな量の間に挟まれ、このことから e が分数 $-a_n/b_n$ によって非常によく近似されることが導かれる。

解答

小問 (i)

$u = t(1-t) = t - t^2$ とおくと、$\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = 1 - 2t$、$\dfrac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2} = -2$ であり、

$$(1-2t)^2 = 1 - 4t + 4t^2 = 1 - 4u$$

である。$f(t) = t^n(1-t)^n = u^n$ とすると、連鎖律より $f'(t) = nu^{n-1}(1-2t)$ である。積の微分法則（product rule）によってもう一度微分すると（u^{n-2} が多項式となるよ

う $n \geq 2$ とする)、

$$\begin{aligned} f''(t) &= n(n-1)u^{n-2}(1-2t)^2 - 2nu^{n-1} \\ &= nu^{n-2}\big[(n-1)(1-4u) - 2u\big] \\ &= nu^{n-2}\big[(n-1) - (4n-2)u\big] \\ &= nt^{n-2}(1-t)^{n-2}\big[(n-1) - 2(2n-1)t(1-t)\big] \end{aligned}$$

となり、これが求める結果である。

小問 (ii)

$n \geq 2$ として引き続き $f(t) = t^n(1-t)^n$ とすると、$n!\,T_n = \int_0^1 f(t)\,\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t$ である。毎回、多項式の側を微分し e^t の側を積分して部分積分を 2 回行うと、

$$\int_0^1 f\,\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t = \Big[f\,\mathrm{e}^t\Big]_0^1 - \Big[f'\,\mathrm{e}^t\Big]_0^1 + \int_0^1 f''\,\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t.$$

考えてみよう なぜ二つの境界項はどちらも消えるのか？

$f(t) = u^n$ と $f'(t) = nu^{n-1}(1-2t)$ はどちらも因子 $u = t(1-t)$ を含み（ここで $n \geq 2$、したがって $n-1 \geq 1$ であることを用いる)、$t = 0$ と $t = 1$ のどちらにおいても $u = 0$ となるからである。よって

$$n!\,T_n = \int_0^1 f''(t)\,\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t.$$

ここで小問 (i) の結果を $f'' = n(n-1)u^{n-2} - 2n(2n-1)u^{n-1}$ の形に書いて代入すると、

$$\begin{aligned} n!\,T_n &= n(n-1)\int_0^1 u^{n-2}\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t - 2n(2n-1)\int_0^1 u^{n-1}\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t \\ &= n(n-1)\,(n-2)!\,T_{n-2} - 2n(2n-1)\,(n-1)!\,T_{n-1} \\ &= n!\,T_{n-2} - 2(2n-1)\,n!\,T_{n-1} \end{aligned}$$

となる。ここで $\int_0^1 u^k\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t = k!\,T_k$ を用いた。$n!$ で割ると

$$T_n = T_{n-2} - 2(2n-1)T_{n-1} \qquad (n \geq 2)$$

となり、題意が示された。

小問 (iii)

まず、$T_0 = \int_0^1 \mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t = \mathrm{e} - 1$ である。

$T_1 = \int_0^1 (t - t^2)\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t$ については、$\int t\,\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t = (t-1)\mathrm{e}^t$ および $\int t^2\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t = (t^2 - 2t + 2)\mathrm{e}^t$ が成り立つことを微分によって確かめられるので、

$$\int_0^1 (t - t^2)\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t = \Big[(-t^2 + 3t - 3)\mathrm{e}^t\Big]_0^1 = -\mathrm{e} + 3,$$

すなわち $T_1 = 3 - \mathrm{e}$ である。

したがって $T_0 = a_0 + b_0\mathrm{e}$（$(a_0, b_0) = (-1, 1)$）、$T_1 = a_1 + b_1\mathrm{e}$（$(a_1, b_1) = (3, -1)$）であり、係数はすべて整数である。ある $n \geq 2$ について、T_{n-2} と T_{n-1} が整数係数でこの形に書けると仮定する。小問 (ii) より

$$T_n = \big(a_{n-2} - 2(2n-1)a_{n-1}\big) + \big(b_{n-2} - 2(2n-1)b_{n-1}\big)\mathrm{e},$$

であり、$2(2n-1)$ は整数であるから、どちらの括弧の中も整数である。（強い）数学的帰納法（strong induction）により、$n \geq 0$ であるすべての T_n は $a_n, b_n \in \mathbb{Z}$ を用いて $a_n + b_n\mathrm{e}$ と書ける。

小問 (iv)

評価。$0 < t < 1$ のとき $0 < t(1-t) \leq \frac{1}{4} < 1$ であるから $0 < t^n(1-t)^n \leq 1$ であり、また $0 < \mathrm{e}^t < \mathrm{e}$ である。よって開区間 $(0, 1)$ 上で

$$0 < \frac{t^n(1-t)^n}{n!}\,\mathrm{e}^t < \frac{\mathrm{e}}{n!}$$

が成り立つ。被積分関数（integrand）は連続であるから、これらの狭義の不等式（strict inequality）を $[0, 1]$（長さ 1 の区間）上で積分しても狭義のままである：

$$0 < T_n < \frac{\mathrm{e}}{n!} \qquad (n \geq 0).$$

（$n = 0$ のときは左側の因子は単に 1 であり、狭義性は $\mathrm{e}^t < \mathrm{e}$ から従う。）

極限。$b_n \neq 0$ であるから、$T_n = a_n + b_n\mathrm{e}$ を b_n で割ると

$$-\frac{a_n}{b_n} - \mathrm{e} = -\frac{T_n}{b_n}, \qquad \text{よって} \qquad \left|-\frac{a_n}{b_n} - \mathrm{e}\right| = \frac{T_n}{|b_n|} \leq T_n < \frac{\mathrm{e}}{n!}.$$

ここで、b_n が零でない**整数**であり、したがって $|b_n| \geq 1$ であることを用いた。$n \to \infty$ のとき $\mathrm{e}/n! \to 0$ であるから、$-a_n/b_n \to \mathrm{e}$ である。

実際には、この評価はかなり甘い。漸化式から $(a_2, b_2) = (-19, 7)$、$(a_3, b_3) = (193, -71)$ であり、近似値 $\frac{19}{7} \approx 2.714$ と $\frac{193}{71} \approx 2.71831$ が得られる。一方、$\mathrm{e} \approx 2.71828$ である。

検算

- 小問 (i) で $n = 2$ とおく：$t^2(1-t)^2 = t^2 - 2t^3 + t^4$ の第 2 次導関数は $2 - 12t + 12t^2$ であり、公式からは $2\big[1 - 6t(1-t)\big] = 2 - 12t + 12t^2$ が得られる。
- $T_1 = 3 - \mathrm{e} \approx 0.2817$ は正であり、小問 (iv) が示すとおり $\mathrm{e}/1!$ より小さい。さらに $T_2 = T_0 - 6T_1 = 7\mathrm{e} - 19 \approx 0.0280$ であり、これは計算機による積分の数値計算で確かめられる。漸化式と評価も、n が 11 までについて同様に確かめられる。

- $n = 4, 5, 6$ に対する $-a_n/b_n$ の値は $\frac{2721}{1001}$、$\frac{49171}{18089}$、$\frac{1084483}{398959}$ であり、e との差はそれぞれ約 10^{-7}、3×10^{-10}、5×10^{-13} である。これは $\mathrm{e}/n!$ だけから予想されるよりもはるかに速い。

よくある間違い

- 境界項がなぜ消えるのかを述べ忘れること、あるいはそれに $n \geq 2$ が必要であることに気づかないこと。$n = 1$ のときは導関数 $1 - 2t$ が両端で零にならない。
- 小問 (iv) で $|b_n| \geq 1$ を使わずに $b_n \neq 0$ だけを用いること。零でない実数はいくらでも小さくなりうる。T_n/b_n が発散しないのは、b_n が整数であるという事実のおかげである。

STEP のその先へ

これは、e が無理数（irrational）であること、さらには超越数（transcendental）であることを証明したエルミート（Hermite）の 1873 年の手法の核心である。すなわち、零ではないが零に収束するような整数係数の組合せ $a_n + b_n\mathrm{e}$ を構成するのである。もし $\mathrm{e} = p/q$ ならば、$q(a_n + b_n\mathrm{e}) = qa_n + b_n p$ は $q\mathrm{e}/n!$ より小さい正の整数となるが、これは n が大きいとき不可能である。同じ多項式 $t^n(1-t)^n$ は、$\zeta(3)$ が無理数であることを示した Beukers の有名な証明にも現れる。数が分数によってどれほどよく近似できるかについてさらに知りたければ、Davenport の *The Higher Arithmetic*（『高等算術』）を読むとよい。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。