解答例

STEP II 2021、第 7 問

純粋数学 ・ 回転行列

> **STEP II 2021、問 7**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は、OCR が配布している 2021 年の STEP 過去問一式（zip ファイル）のうち、STEP II の問題用紙にある：
>
> www.ocr.org.uk/Images/696588-2021-past-papers.zip

鍵となる考え方

2×2 の回転行列（rotation matrix）は非常に限られた形をしている。すなわち $\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$ という形であり、その列ベクトルは単位ベクトル（unit vector）である。$\mathbf{R}+\mathbf{I}$ もこの形を保つことを要請すると、ϕ は完全に決まる。$\mathbf{S}^3=\mathbf{I}$ を満たす一般の行列に対しては、行列式（determinant）（これは乗法的である）と、関係式 $\mathbf{S}^2=(a+d)\mathbf{S}-\mathbf{I}$ が有用な道具となる。後者を用いると、$\mathbf{S}$ の任意の累乗を $\mathbf{S}$ と $\mathbf{I}$ の一次結合で表すことができる。

解答

小問 (i)

$c=\cos\phi$、$s=\sin\phi$ とおくと、

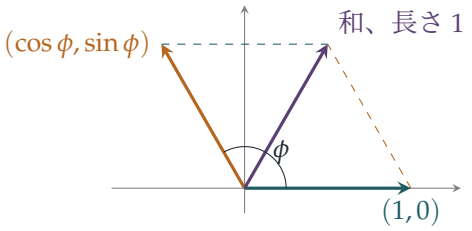
$$\mathbf{R}=\begin{pmatrix}c & -s\\ s & c\end{pmatrix},\qquad \mathbf{R}+\mathbf{I}=\begin{pmatrix}1+c & -s\\ s & 1+c\end{pmatrix}.$$

これはすでに $\begin{pmatrix}p & -q\\ q & p\end{pmatrix}$ という形をしており、このような行列が回転行列となるのは $p^2+q^2=1$ のときであり、かつそのときに限る（このとき、ある θ について $(p,q)=(\cos\theta,\sin\theta)$ となる）。したがって

$$(1+c)^2+s^2=1 \iff 2+2c=1 \iff \cos\phi=-\tfrac{1}{2}.$$

が必要である。$0^\circ\le\phi<360^\circ$ の範囲では、これより $\phi=120^\circ$ または $\phi=240^\circ$ を得る。

幾何学的には、$\mathbf{R}+\mathbf{I}$ の第 1 列は単位ベクトル $(1,0)$ と $(\cos\phi,\sin\phi)$ の和であり、この和もまた単位ベクトルでなければならない。すなわち、3 つのベクトルは $\phi=120^\circ$ の場合の図のように正三角形（equilateral triangle）をなす。



いずれの場合も $\mathbf{R}^3$ は 3ϕ の回転であり、これは 360° または 720°、すなわち整数回の一周である。よって $\mathbf{R}^3=\mathbf{I}$ である。

小問 (ii)

行列式。det は乗法的であるから、$(\det\mathbf{S})^3=\det(\mathbf{S}^3)=\det\mathbf{I}=1$ である。行列は実行列なので、$\det\mathbf{S}$ は 3 乗すると 1 になる実数であり、そのような実数は 1 のみである。よって $\det\mathbf{S}=ad-bc=1$ である。

2 次の関係式。展開すると、

$$\mathbf{S}^2=\begin{pmatrix}a^2+bc & ab+bd\\ ca+dc & bc+d^2\end{pmatrix},\qquad (a+d)\mathbf{S}-\mathbf{I}=\begin{pmatrix}a^2+ad-1 & ab+bd\\ ac+dc & ad+d^2-1\end{pmatrix}.$$

非対角成分は一致し、対角成分も $bc=ad-1$（すなわち $\det\mathbf{S}=1$）より一致する。よって、求めるとおり $\mathbf{S}^2=(a+d)\mathbf{S}-\mathbf{I}$ である。

トレース。$t=a+d$ とおく（t はトレース（trace）である）。関係式に $\mathbf{S}$ を掛け、再び関係式を用いると、

$$\mathbf{S}^3=t\mathbf{S}^2-\mathbf{S}=t(t\mathbf{S}-\mathbf{I})-\mathbf{S}=(t^2-1)\mathbf{S}-t\mathbf{I}.$$

$\mathbf{S}^3=\mathbf{I}$ とおくと、

$$(t^2-1)\mathbf{S}=(t+1)\mathbf{I}.$$

を得る。

考えてみよう そのまま t^2-1 で割って終わりにしてよいだろうか？

注意なしにはできない。$t^2-1=0$ の場合を別に調べる必要があり、実際に起こるのはこの場合である。

- $t^2\neq1$ ならば、$\mathbf{S}=\dfrac{t+1}{t^2-1}\mathbf{I}=k\mathbf{I}$（$k$ は実数）となる。このとき $\mathbf{S}^3=k^3\mathbf{I}=\mathbf{I}$ より $k^3=1$ でなければならず、$k=1$、すなわち $\mathbf{S}=\mathbf{I}$ となるが、これは除外されている。

- よって $t^2 = 1$ である。方程式は $\mathbf{0} = (t+1)\mathbf{I}$ となるので、$t = -1$ である（$t = 1$ とすると $2\mathbf{I} = \mathbf{0}$ となり、これは誤りである）。

したがって $a + d = -1$ である。

小問 (iii)

まず $\mathbf{S} \neq \mathbf{I}$ である。そうでなければ $\mathbf{S} + \mathbf{I} = 2\mathbf{I}$ となり、その行列式は 4 で、長さを 2 倍にするので回転ではないからである。よって小問 (ii) が適用でき、$a + d = -1$ である。

$\mathbf{S} + \mathbf{I}$ は回転であるから、その回転角を θ とすると、

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} \cos\theta - 1 & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta - 1 \end{pmatrix}.$$

トレースの条件より $2\cos\theta - 2 = -1$、よって $\cos\theta = \frac{1}{2}$、$\sin\theta = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$ である。すると

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\sin\theta \\ \sin\theta & -\frac{1}{2} \end{pmatrix},$$

となり、これは回転行列の形をしていて、$\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \sin^2\theta = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = 1$ を満たす。したがって $\mathbf{S}$ は回転であり、その余弦は $-\frac{1}{2}$、正弦は $\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$ である。

回転角は 120°（$\theta = 60^\circ$ のとき）または 240°（$\theta = 300^\circ$ のとき）である。どちらも実際に起こる。小問 (i) より、これらの回転はいずれも $\mathbf{S} + \mathbf{I}$ が回転であり、かつ $\mathbf{S}^3 = \mathbf{I}$ を満たすからである。（同じことであるが、$\mathbf{S}$ が回転であるとわかれば、小問 (i) そのものが可能な回転角を与えている。）

検算

- $\phi = 120^\circ$ のとき $\mathbf{R} + \mathbf{I} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ であり、これは 60° の回転である。$\phi = 240^\circ$ のときは 300° の回転である。
- 行列 $\mathbf{S} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ は $\mathbf{S}^3 = \mathbf{I}$ を満たし（計算して確かめよ）、回転ではない。それでも小問 (ii) の予測どおり、行列式は 1、トレースは -1 である。その $\mathbf{S} + \mathbf{I} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ は回転ではなく、小問 (iii) と整合する。
- $\mathbf{S}^3 = \mathbf{I}$、$\mathbf{S} \neq \mathbf{I}$ を満たす多数のランダムな実行列についてコンピュータで確認したところ、いずれも行列式 1、トレース -1 であり、$\mathbf{S}^2$ の関係式も成り立った。また、小問 (iii) で θ を走査したところ、$\theta = 60^\circ, 300^\circ$ のみが見つかった。

よくある間違い

- $t^2 - 1$ が 0 になりうるかを確かめずに割ってしまうこと。$t^2 = 1$ の場合こそがまさに答えである。
- 小問 (iii) で小問 (ii) を使う前に、$\mathbf{S} \neq \mathbf{I}$ を示しておく必要があることを忘れること。
- $\det(\mathbf{S} + \mathbf{I}) = 1$ であれば $\mathbf{S} + \mathbf{I}$ が回転になるのに十分だと考えること。ここではそれは自動的に成り立つので、何の情報も与えない。

STEP のその先へ

関係式 $\mathbf{S}^2 = (a + d)\mathbf{S} - (\det \mathbf{S})\mathbf{I}$ は、ケイリー・ハミルトンの定理（Cayley–Hamilton theorem）の 2×2 の場合である。この定理は、任意の正方行列はそれ自身の特性多項式（characteristic polynomial）を満たす、というものである。小問 (ii) は、位数（order）3 の実 2×2 行列の固有値（eigenvalue）は 1 の 3 乗根（cube roots of unity）のうち実数でない 2 つであることを述べており、そのような行列は常に 120° の回転と**相似**（similar）であるが、必ずしもそれと等しいとは限らない。Strang の *Introduction to Linear Algebra*（線形代数入門）では、固有値と相似が展開されている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。