解答例

STEP II 2021、第 6 問

純粋数学 ・ 円の幾何と近似

> **STEP II 2021、問 6**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は、OCR が配布している 2021 年の STEP 過去問一式（zip ファイル）のうち、STEP II の問題用紙にある：
>
> www.ocr.org.uk/Images/696588-2021-past-papers.zip

鍵となる考え方

すべては一つの三角形の中で起こる。すなわち A、道路の中心 O、そして自転車が描く円の中心 O' の三点がつくる三角形である。対称性（symmetry）により O' は O を通り $\angle AOB$ を二等分する直線上にあり、接する（tangency）という条件から距離 OO' が決まる。あとはこの三角形で余弦定理（cosine rule）と正弦定理（sine rule）を用いれば、d と $\alpha - \theta$ が求まる。最後の小問では、1 よりはるかに小さいとは、w/R について一次の項（first-order terms）までを残し、小角近似（small-angle approximation）を用いるという意味である。

解答

O を原点とし、対称軸（line of symmetry）を鉛直にとる。すると $A = (-(R+w)\sin\alpha,\ (R+w)\cos\alpha)$ であり、B はその鏡像である。O からの距離を r とすると、道路は領域 $R \le r \le R+w$ である。

小問 (i)

弦（chord）AB 上で O に最も近い点はその中点 M である。なぜなら三角形 OAB は二等辺三角形（isosceles）なので $OM \perp AB$ となるからである。このとき

$$OM = (R+w)\cos\alpha \le \tfrac{1}{2}(R+w) < \tfrac{1}{2}(R+R) = R,$$

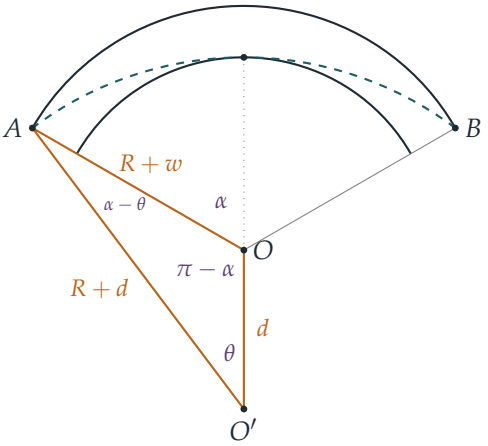
となる。ここで $\cos\alpha \le \frac{1}{2}$（$\frac{1}{3}\pi \le \alpha \le \frac{1}{2}\pi$ による）を用い、続いて $w < R$ を用いた。よって M は内側の円の真に内部にあり、そこは道路の外である。A から B へまっすぐ走る経路は必ず M を通るので、道路上にとどまることはできない。

小問 (ii)

O' はどこにあるか？円は A と B を通るので、その中心は両者から等距離にあり、AB の垂直二等分線（perpendicular bisector）、すなわち O を通る対称軸上にある。この円は内側の円に接し、しかもそれより大きい（$R+d>R$）ので、内側の円はこの円の内部にあって内側から接する（internally tangent）。内接する二円では、中心間の距離は半径の差に等しい：

$$OO' = (R+d) - R = d.$$

経路は外側、つまり道路の方へふくらむので、図のように O' は O に関して道路と反対側にある。すると三角形 AOO' において $OA = R+w$、$OO' = d$、$O'A = R+d$ であり、O における角は $\pi - \alpha$ である（$\angle AOM = \alpha$ の補角（supplementary angle）である）。O' における角は $\frac{1}{2}\angle AO'B = \theta$ なので、A における角は $\pi - (\pi - \alpha) - \theta = \alpha - \theta$ である。



(a)　三角形 AOO' に余弦定理を適用し、$\cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha$ を用いると

$$\begin{aligned}(R+d)^2 &= (R+w)^2 + d^2 + 2(R+w)d\cos\alpha \\ R^2 + 2Rd &= R^2 + 2Rw + w^2 + 2(R+w)d\cos\alpha \\ 2d\big(R - (R+w)\cos\alpha\big) &= w(2R+w),\end{aligned}$$

となるので

$$d = \frac{w(2R+w)}{2\big(R-(R+w)\cos\alpha\big)}.$$

分母の括弧は小問 (i) により正なので、これは意味のある正の長さである。

(b) 同じ三角形に正弦定理を適用し、角 $\alpha-\theta$（対辺 $OO'=d$）と角 $\pi-\alpha$（対辺 $O'A=R+d$）を組にすると

$$\frac{\sin(\alpha-\theta)}{d}=\frac{\sin(\pi-\alpha)}{R+d}\quad\Longrightarrow\quad\sin(\alpha-\theta)=\frac{d\sin\alpha}{R+d}.$$

小問 (iii)

$\varepsilon=w/R$ とおくと、$0<\varepsilon\ll 1$ である。(a) の結果を R で割ると

$$\frac{d}{R}=\frac{\varepsilon(2+\varepsilon)}{2\big(1-(1+\varepsilon)\cos\alpha\big)}.$$

$\cos\alpha\le\frac{1}{2}$ より、分母は少なくとも $2\big(1-\frac{1}{2}(1+\varepsilon)\big)=1-\varepsilon$ であるから

$$0<\frac{d}{R}\le\frac{\varepsilon(2+\varepsilon)}{1-\varepsilon}\approx 2\varepsilon,$$

となり、これは 1 よりはるかに小さい。（一次の近似では $d/R\approx\varepsilon/(1-\cos\alpha)$ である。）

考えてみよう 正弦が小さいことからわかるのは、角が 0 に近いか、または π に近いかということだけである。どちらだろうか？

(b) より $0<\sin(\alpha-\theta)=\dfrac{(d/R)\sin\alpha}{1+d/R}<\dfrac{d}{R}$ であり、これは小さい。角 $\alpha-\theta$ は三角形 AOO' の内角なので正であり、さらに $\theta>0$ より $\alpha\le\frac{1}{2}\pi$ よりも小さい。$(0,\frac{1}{2}\pi)$ 上で正弦は増加し、$\sin x\ge\frac{2}{\pi}x$ を満たすので、$\alpha-\theta\le\frac{\pi}{2}\sin(\alpha-\theta)<\frac{\pi}{2}\cdot\frac{d}{R}$ となり、これもまた 1 よりはるかに小さい。

小問 (iv)

友人は外側の縁に沿って走る。これは O において 2α の角をなす半径 $R+w$ の弧なので、その経路の長さは $L=2\alpha(R+w)$ である。私の経路は、AB に関して O' と反対側にある半径 $R+d$ の弧であり、O' において 2θ の角をなすので、その長さは $2\theta(R+d)$ である。したがって

$$\begin{aligned}S&=2\alpha(R+w)-2\theta(R+d)\\&=2(R+d)(\alpha-\theta)+2\alpha(R+w)-2\alpha(R+d)\\&=2(R+d)(\alpha-\theta)+2\alpha(w-d),\end{aligned}$$

となり、題意が示された（$2\alpha(R+d)$ を加えて引いた）。

近似。ここからは ε について一次まで計算し、残す項に比べて ε^2 のオーダーの項は無視する。(iii) より $\alpha-\theta$ は小さいので、$\alpha-\theta\approx\sin(\alpha-\theta)$ であり、その誤差は $(\alpha-\theta)^3$

のオーダーである。(b) より

$$2(R+d)(\alpha-\theta) \approx 2(R+d)\cdot\frac{d\sin\alpha}{R+d} = 2d\sin\alpha.$$

よって

$$S \approx 2d\sin\alpha + 2\alpha w - 2\alpha d = 2\alpha w - 2d(\alpha-\sin\alpha).$$

ここで (iii) の $d \approx \dfrac{w}{1-\cos\alpha}$ を用いると

$$S \approx 2w\left(\alpha - \frac{\alpha-\sin\alpha}{1-\cos\alpha}\right) = 2w\cdot\frac{\alpha-\alpha\cos\alpha-\alpha+\sin\alpha}{1-\cos\alpha} = \frac{2w(\sin\alpha-\alpha\cos\alpha)}{1-\cos\alpha}.$$

最後に $L = 2\alpha R(1+\varepsilon) \approx 2\alpha R$ であり、S はすでに ε について一次なので、L を $2\alpha R$ で置き換えても S/L は二次のオーダーでしか変わらない。よって

$$\frac{S}{L} \approx \left(\frac{\sin\alpha-\alpha\cos\alpha}{\alpha(1-\cos\alpha)}\right)\frac{w}{R},$$

となり、これが求める割合である。

検算

- $\alpha = \frac{1}{2}\pi$ のとき、この割合は $\frac{2}{\pi}\cdot\frac{w}{R} \approx 0.637\,\frac{w}{R}$ であり、$\alpha = \frac{1}{3}\pi$ のときはおよそ $0.654\,\frac{w}{R}$ である。どちらも正であり、そうでなければならない。$\tan\alpha > \alpha$ から $\sin\alpha > \alpha\cos\alpha$ が得られるからである。
- $R = 1$、$w = 0.01$、$\alpha = \frac{1}{2}\pi$ のとき、厳密な式からは $d \approx 0.01005$、$\alpha-\theta \approx 0.00995$、$S/L \approx 0.006285$ が得られ、近似値 0.006366 と比べられる。相対誤差は約 1% で、当然そうあるべきように w/R のオーダーであり、w を 10 分の 1 にすると誤差も 10 分の 1 になる。
- コンピュータによる検算では、A と B を座標上に置いて接する円を直接求め、R、w、α を無作為に何千通りも選んで、d、$\sin(\alpha-\theta)$、S の式が正しいことを確かめた。

よくある間違い

- $OO' = R+d+R$ や $OO' = w$ としてしまうこと。二円は**内側で**接するので、中心間の距離は半径の差 d である。
- 三角形 AOO' の O における角に対して、$\cos(\pi-\alpha)$ ではなく $\cos\alpha$ を使ってしまうこと。これでは最後の項の符号が逆になる。
- (iii) で、$\sin(\alpha-\theta)$ が小さいことだけを述べること。角そのものが小さいと結論するには、$\alpha-\theta$ が $(0, \frac{1}{2}\pi)$ にあることも必要である。

STEP のその先へ

「1 よりはるかに小さい」というのは摂動論（perturbation theory）の言葉である。小さなパラメータ ε について展開し、主要項を残し、誤差が本当により高次であることを確かめるのである。大学ではこれをテイラー（Taylor）の定理（Taylor's theorem）とランダウの記号（big-O notation）によって厳密に扱い、ここでは S/L が与えられた割合の ε 倍に ε^2 のオーダーの項を加えたものに等しいことが示される。剰余項付きのテイラーの定理を丁寧に扱ったものとしては Abbott, *Understanding Analysis*（解析学入門）を、同じ趣向の問題をさらに解きたければ Siklos, *Advanced Problems in Mathematics*（STEP 対策の問題集）を参照するとよい。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。