解答例

STEP II 2021、第 5 問

純粋数学 ・ 一階微分方程式

> **STEP II 2021、問 5**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は、OCR が配布している 2021 年の STEP 過去問一式（zip ファイル）のうち、STEP II の問題用紙にある：
>
> www.ocr.org.uk/Images/696588-2021-past-papers.zip

鍵となる考え方

小問 (i) は一階微分方程式（first-order differential equation）であり、変数分離形（separable）でもなく、扱いやすい形の線形（linear）方程式でもすぐにはないが、与えられた置換（substitution）によって直接積分できる方程式に変わる。小問 (ii) は幾何の問題に見えるが、接線（tangent）の方程式を書き下し、それが $(1,t)$ を通るという条件を課すと、ちょうど $a=1$ のときの小問 (i) の方程式が得られる。グラフの概形は導関数（derivative）から得られ、その導関数は驚くほど簡単な形になる。

解答

小問 (i)

この方程式は $x \neq a$ でしか意味をもたないので、$x > a$ である区間、または $x < a$ である区間で考える。$y = (x-a)u$ とおくと、積の微分法（product rule）により

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = u + (x-a)\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}.$$

これを方程式に代入すると

$$(x-a)u + (x-a)^2\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = (x-a)u - x \quad \Longrightarrow \quad \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = -\frac{x}{(x-a)^2}.$$

u を含む項が打ち消し合う。これこそがこの置換の狙いである。$x = (x-a)+a$ と書くと

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = -\frac{1}{x-a} - \frac{a}{(x-a)^2}, \qquad \text{よって} \qquad u = -\ln|x-a| + \frac{a}{x-a} + c$$

となる。ただし c は定数である。両辺に $x-a$ を掛けて

$$\boxed{y = a + (x-a)(c - \ln|x-a|)}$$

を得る。ここで定数 c は $x=a$ の両側で異なってもよい。

確認：$y' = c - \ln|x-a| - 1$ であるから $(x-a)y' = (y-a) - (x-a) = y - x$ となり、確かに方程式を満たす。

小問 (ii)

点 $(t, \mathrm{f}(t))$ における接線は $y = \mathrm{f}(t) + \mathrm{f}'(t)(x-t)$ である。これが $(1,t)$ を通るための必要十分条件は

$$t = \mathrm{f}(t) + \mathrm{f}'(t)(1-t), \qquad \text{すなわち} \qquad (t-1)\,\mathrm{f}'(t) = \mathrm{f}(t) - t.$$

t を x と書き直すと、これは $a=1$ のときの小問 (i) の方程式であり、$x \neq 1$ で成り立つ。したがって $x<1$ と $x>1$ のそれぞれにおいて

$$\mathrm{f}(x) = 1 + (x-1)(c - \ln|x-1|),$$

であり、定数は各側で別々に定める。

> **考えてみよう** $\mathrm{f}(0)=0$ のような一つの条件だけで、すべての x について曲線が決まらないのはなぜか。

方程式は $x=1$ において何も教えてくれないので、$x<1$ での解と $x>1$ での解は互いに独立である。問題がそれぞれの小問に別々の条件を与えているのはそのためである。

(a) $x<1$ では $|x-1| = 1-x$ である。条件 $\mathrm{f}(0)=0$ より $0 = 1 + (-1)(c - \ln 1) = 1 - c$ となるので $c=1$ であり、

$$\boxed{\mathrm{f}(x) = 1 + (x-1)(1 - \ln(1-x)) \quad (x<1).}$$

微分すると $\mathrm{f}'(x) = 1 - \ln(1-x) + (x-1)\cdot\dfrac{1}{1-x} = -\ln(1-x)$ である。したがって次がわかる。

- $\mathrm{f}'(x) = 0$ となるのは $1-x=1$ のときに限られ、停留点（stationary point）は $(0,0)$ ただ一つである。$x<1$ で $\mathrm{f}''(x) = \dfrac{1}{1-x} > 0$ であるから、曲線は下に凸（convex）であり、$(0,0)$ は極小（minimum）である。よって $\mathrm{f}(x) \geq 0$ であり、曲線は原点で x 軸にちょうど接する。
- $x \to 1^-$ のとき、$z = x-1 \to 0$ とおくと、$z\ln|z| \to 0$ を用いて $\mathrm{f}(x) = 1 + z - z\ln|z| \to 1$ となる。傾き（gradient）$-\ln(1-x) \to +\infty$ であるから、曲線は $(1,1)$ に近づき、そこで垂直になる。

- $x \to -\infty$ のとき、$x-1$ と $1-\ln(1-x)$ はともに負で絶対値が大きくなるので、$\mathrm{f}(x) \to +\infty$ である。

描くのに役立つ点：$\mathrm{f}(1-\mathrm{e}) = 1$、$\mathrm{f}(-1) = 2\ln 2 - 1 \approx 0.39$。

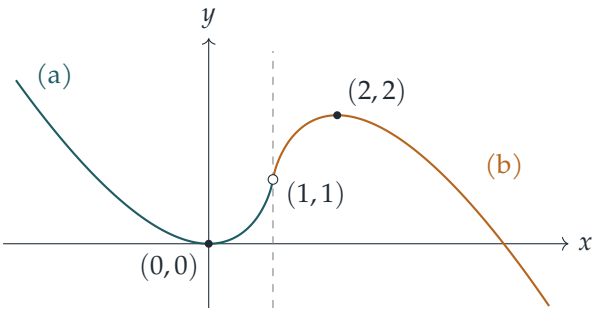
(b) $x > 1$ では $|x-1| = x-1$ である。条件 $\mathrm{f}(2) = 2$ より $2 = 1 + 1\cdot(c-0)$ となるので、ここでも $c = 1$ であり、

$$\mathrm{f}(x) = 1 + (x-1)\bigl(1-\ln(x-1)\bigr) \quad (x>1), \qquad \mathrm{f}'(x) = -\ln(x-1).$$

- 停留点は $x = 2$ における $(2,2)$ のみである。ここで $\mathrm{f}''(x) = -\dfrac{1}{x-1} < 0$ であるから、曲線は上に凸（concave）であり、$(2,2)$ は極大（maximum）である。
- $x \to 1^+$ のとき、（同じ極限により）$\mathrm{f}(x) \to 1$ であり、$\mathrm{f}'(x) \to +\infty$ である。すなわち曲線は $(1,1)$ から垂直に出発する。
- $x \to \infty$ のとき $1-\ln(x-1) \to -\infty$ であるから、$\mathrm{f}(x) \to -\infty$ である。曲線は $(1+\mathrm{e},1)$ を通り、$x \approx 4.59$ の付近で x 軸とただ一度交わる。

> **考えてみよう**　(a) を解き終えた後、(b) の概形をもっと手早く知る方法はあるだろうか。

ある。$s = |x-1|$ とおくと、(a) の枝は $\mathrm{f}(1-s) = 1 - s(1-\ln s)$、(b) の枝は $\mathrm{f}(1+s) = 1 + s(1-\ln s)$ である。よって $\mathrm{f}(1+s) - 1 = -\bigl(\mathrm{f}(1-s)-1\bigr)$ となり、(b) の枝は (a) の枝を $(1,1)$ のまわりに半回転させたものである。極小点 $(0,0)$ は極大点 $(2,2)$ に移る。



曲線は $x = 1$ では定義されない（白丸）が、どちらの枝も垂直な接線をもって $(1,1)$ に近づく。

検算

- 接線の性質を直接確かめる。$t = 0$ では接線は水平で $y = 0$ であり、確かに $(1,0)$ を通る。$t = 2$ では接線は $y = 2$ であり、$(1,2)$ を通る。

- $t = -1$ のとき：$\mathrm{f}(-1) \approx 0.386$、$\mathrm{f}'(-1) = -\ln 2 \approx -0.693$ である。$x = 1$ における接線の高さは $0.386 + 2(-0.693) \approx -1.000$ であり、t に等しい。
- 対称性の確認：すべての $s > 0$ に対して $\mathrm{f}(1+s) + \mathrm{f}(1-s) = 2$ である。たとえば $\mathrm{f}(4) + \mathrm{f}(-2) = (4 - 3\ln 3) + (3\ln 3 - 2) = 2$。

よくある間違い

- $\ln|x-a|$ の絶対値（modulus）を書き忘れ、その結果、小問 (a) で $x < 1$ を扱えなくなる。
- (a) で求めた定数が $x > 1$ でも自動的に使えると思い込む。ここではたまたま同じ値になるが、それは $\mathrm{f}(2) = 2$ を用いて確かめなければならない。
- $x \to 1$ のとき $\mathrm{f}(x) \to 0$ となる、あるいは発散すると結論してしまう。項 $(x-1)\ln|x-1|$ は 0 に収束するので $\mathrm{f} \to 1$ である。発散するのは傾きのほうである。

STEP のその先へ

方程式 $(x-a)y' = y - x$ は、原点を $x = a$、$y = a$ に平行移動すると**同次形**（homogeneous）になる。実際、$X = x - a$、$Y = y - a$ とおくと $XY' = Y - X$ となる。このとき置換 $Y = Xu$ は同次形方程式に対する標準的な解法である。y' の係数が 0 になる点 $x = a$ は**特異点**（singular point）であり、特異点の両側での解は互いにまったく関係がなくてもよい。Boyce と DiPrima の *Elementary Differential Equations*（初等微分方程式の教科書）は、この二つの考え方をともに扱っている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。