解答例

STEP II 2021、第 4 問

純粋数学 ・ ランベルトの W 関数

> **STEP II 2021、問 4**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は、OCR が配布している 2021 年の STEP 過去問一式（zip ファイル）のうち、STEP II の問題用紙にある：
>
> www.ocr.org.uk/Images/696588-2021-past-papers.zip

この問題は、*Beyond STEP* の第 3.9 節「新しい関数を発明する」で詳しく解説されている：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/ch03/lambert-w.html

鍵となる考え方

関数 g は xe^x の逆の操作を行うものであるから、この問題全体は、各方程式をある新しい変数 u について $ue^u = c$ の形に変形することに尽きる。いったんこの形になれば、小問 (i) のグラフからすべてがわかる。すなわち、$c < -\frac{1}{e}$ ならば解はなく、$-\frac{1}{e} < c < 0$ ならば解は 2 つあり、g が選び出すのは常にそのうち $u \geq -1$ を満たす方だけである。対数は $x = e^u$ と置換することで処理する。

解答

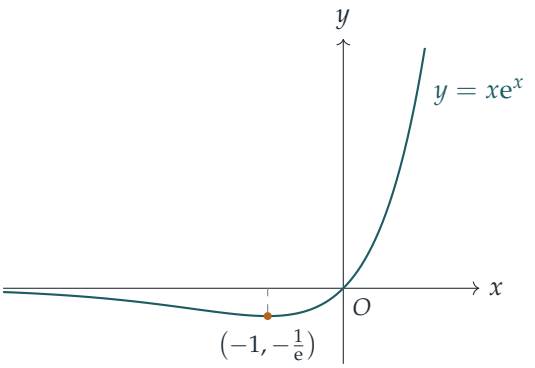
小問 (i)

$y = xe^x$ とおく。積の微分法（product rule）により

$$\frac{dy}{dx} = (1 + x)e^x,$$

であり、$e^x > 0$ であるから、これが 0 になるのは $x = -1$ のときだけである。傾きは $x < -1$ で負、$x > -1$ で正であるから、停留点（stationary point）は $\left(-1, -\frac{1}{e}\right)$ における極小点（minimum）ただ 1 つである。

曲線の符号は x の符号と一致し、曲線は原点を通る。$x \to \infty$ のとき、$y \to \infty$ と急速に増大する。$x \to -\infty$ のときは e^x が x に勝つので、$y \to 0$ となり、下側から近づく。すなわち、x 軸の負の部分が漸近線（asymptote）である。



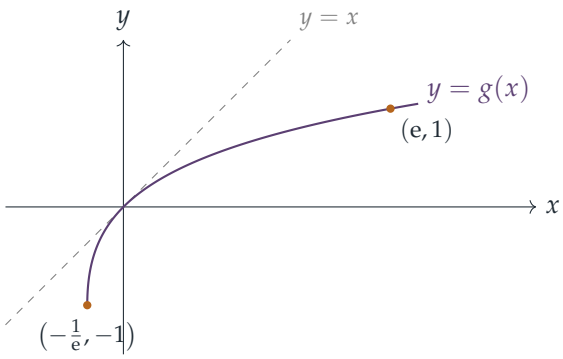
小問 (ii)

f が逆関数（inverse）をもつためには、$[a, \infty)$ 上で一対一（one-to-one）でなければならない。$a < -1$ ならば、この区間は $x = -1$ 付近で極小点の両側にある点を含む。f は連続（continuous）であり、$(-\infty, -1]$ で狭義単調減少（strictly decreasing）、$[-1, \infty)$ で狭義単調増加（strictly increasing）であるから、$-\frac{1}{e}$ よりわずかに大きいある値を 2 回とることになる。$a \geq -1$ ならば f は狭義単調増加であり、したがって一対一である。よって、とりうる最小の値は

$$a = -1.$$

である。このとき f は $[-1, \infty)$ を $[-\frac{1}{e}, \infty)$ の上へ写すので、g の定義域（domain）は $[-\frac{1}{e}, \infty)$、値域（range）は $[-1, \infty)$ である。

g のグラフは、小問 (i) のグラフの右側の枝を直線 $y = x$ に関して対称に折り返したもの（鏡映（reflection））である。このグラフは $(-\frac{1}{e}, -1)$ から鉛直な接線（vertical tangent）をもって始まり（これは極小点における水平な接線を折り返したものである）、原点を傾き 1 で通り（$f'(0) = 1$ であるから）、増加の仕方はますます緩やかになっていく。実際、$g(e) = 1$ であり、大きな x に対して $g(x)$ は $\ln x$ よりもゆっくり増加する。



小問 (iii) では、次の 2 つの事実を繰り返し用いる。$c \geq -\frac{1}{\mathrm{e}}$ に対して、$u = g(c)$ は $u\mathrm{e}^u = c$ の解のうち $u \geq -1$ を満たすものである。また、小問 (i) のグラフから、方程式 $u\mathrm{e}^u = c$ は次のようになる。

- $c < -\frac{1}{\mathrm{e}}$ ならば実数解をもたない。
- $-\frac{1}{\mathrm{e}} < c < 0$ ならば実数解を 2 つもつ。すなわち $g(c) \in (-1, 0)$ と、-1 より小さいもう 1 つの解である。
- $c \geq 0$ ならば実数解をちょうど 1 つ、$g(c)$ をもつ（$u < 0$ のとき左辺は負である）。

小問 (iii)

(a) e^x（これは決して 0 にならない）を掛けると

$$x\mathrm{e}^x = \tfrac{1}{5}.$$

となる。$\frac{1}{5} > 0$ であるから、実数解はちょうど 1 つであり、

$$x = g\left(\tfrac{1}{5}\right).$$

である。

(b) $\ln x$ が定義されるためには $x > 0$ が必要であるから、$u = \ln x$ を実数として $x = \mathrm{e}^u$ とおく。方程式は

$$2u\mathrm{e}^u + 1 = 0 \iff u\mathrm{e}^u = -\tfrac{1}{2}.$$

となる。しかし、すべての u に対して $u\mathrm{e}^u \geq -\frac{1}{\mathrm{e}}$ であり、$\mathrm{e} > 2$ であるから $-\frac{1}{2} < -\frac{1}{\mathrm{e}}$ である。よって**実数解は存在しない**。

(c) 先ほどと同様に $x = \mathrm{e}^u$ とおくと

$$3u\mathrm{e}^u + 1 = 0 \iff u\mathrm{e}^u = -\tfrac{1}{3}.$$

となる。$\mathrm{e} < 3$ であるから $-\frac{1}{\mathrm{e}} < -\frac{1}{3} < 0$ であり、u の値は 2 つある。したがって（$u \mapsto \mathrm{e}^u$ は一対一であるから）実数解 x も 2 つある。そのうちの 1 つは

$$x = \mathrm{e}^{g(-1/3)}.$$

である。

考えてみよう これは大きい方の解か、それとも小さい方の解か。

もう一方の u の値は -1 より小さく、一方 $g(-\frac{1}{3}) > -1$ である。e^u は u について増加関数であるから、解 $\mathrm{e}^{g(-1/3)}$ は 2 つの解のうち**大きい方**である。

(d) ここでも $x > 0$ である。指数をとると $x = 3\ln x \iff \mathrm{e}^{x/3} = x \iff x\mathrm{e}^{-x/3} = 1$ となる。$u\mathrm{e}^u$ の形にするには前に掛かる因数と指数を一致させる必要があるので、$u = -\frac{x}{3}$ とおき、両辺に $-\frac{1}{3}$ を掛ける。

$$\left(-\frac{x}{3}\right)\mathrm{e}^{-x/3} = -\frac{1}{3}.$$

(c) と同様に $-\frac{1}{\mathrm{e}} < -\frac{1}{3} < 0$ であるから、u の値は 2 つあり、どちらも負である。よって $x = -3u$ により正の解が 2 つ得られる。そのうちの 1 つは

$$x = -3\,g\left(-\tfrac{1}{3}\right).$$

である。今度は写像 $u \mapsto x = -3u$ が**減少**である。もう一方の u の値は -1 より小さいので、もう一方の解は 3 より大きい。一方、ここで得た解は $x = -3g(-\frac{1}{3}) < 3$ を満たす。したがって、求めた解は 2 つのうち**小さい方**である。

小問 (iv)

$x > 0$ であるから対数をとると、$x^x = 10 \iff x\ln x = \ln 10$ となる。$x = \mathrm{e}^u$ とおくと

$$u\mathrm{e}^u = \ln 10.$$

となる。$\ln 10 > 0$ であるから、これはただ 1 つの解 $u = g(\ln 10)$ をもつ。よって解は

$$x = \mathrm{e}^{g(\ln 10)}.$$

である。(同値な表し方として、$c \neq 0$ のとき $\mathrm{e}^{g(c)} = c/g(c)$ であるから、解は $\dfrac{\ln 10}{g(\ln 10)}$ とも書ける。)

検算

- 数値的には $g(-\frac{1}{3}) \approx -0.6191$ である。(c) ではこれにより $x \approx 0.5384$ となり、$3(0.5384)\ln(0.5384) \approx -1.000$ である。もう一方の解は約 0.2204 であり、確かに小さい。
- (d) では $x \approx 1.8572$ であり、$3\ln 1.8572 \approx 1.8572$ である。もう一方の解は約 $4.536 > 3$ であり、予想どおりである。
- (iv) では $g(\ln 10) \approx 0.9188$ であるから $x \approx 2.5062$ となり、$2.5062^{2.5062} \approx 10.00$ である。
- (b) では、$2x\ln x + 1$ の最小値は $1 - \frac{2}{\mathrm{e}} \approx 0.264 > 0$ ($x = \frac{1}{\mathrm{e}}$ のとき) であり、解が存在しないことが確かめられる。

よくある間違い

- 小問 (ii) で、曲線がそこで一対一に「見える」からといって $a = 0$ としてしまう。極値をとる点は $x = -1$ であり、原点ではない。
- (d) で $-\frac{1}{3}$ を掛け忘れ、前に掛かる因数が指数と一致せず、g を適用できなくなる。
- g を用いて求めた解が常に大きい方であると思い込む。(c) では $x = \mathrm{e}^u$ が u について増加なのでそのとおりだが、(d) では $x = -3u$ によって大小が逆転するので成り立たない。

STEP のその先へ

関数 g はランベルト W 関数（*Lambert W function*）の主枝（principal branch）であり、通常 W_0 と書かれる。$-\frac{1}{\mathrm{e}} < c < 0$ のときの $u\mathrm{e}^u = c$ のもう一方の解は、第 2 の枝 W_{-1} から得られる。この関数は、遅延微分方程式（delay differential equations）、組合せ論（combinatorics、ラベル付きの木の数え上げ）、物理学など、未知数が指数関数の内側と外側の両方に現れるところならどこにでも現れる。逆関数が一対一でなくなる点を越えて逆関数を延長することは、複素解析（complex analysis）における枝と分岐点（branch point）の理論の出発点である。Needham の *Visual Complex Analysis*（視覚的に学ぶ複素解析）は、こうした考え方に出会うための素晴らしい一冊である。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。