解答例

STEP II 2021、第 3 問

純粋数学 ・ 整数部分と小数部分

> **STEP II 2021、問 3**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は、OCR が配布している 2021 年の STEP 過去問一式（zip ファイル）のうち、STEP II の問題用紙にある：
>
> www.ocr.org.uk/Images/696588-2021-past-papers.zip

鍵となる考え方

すべての実数は、整数部分（integer part）と $[0,1)$ に属する小数部分（fractional part）にただ一通りに分けられる。したがって、方程式が「整数と $[0,1)$ に属する数の和が 4.9 に等しい」と述べているならば、両方の部分が決まってしまう。整数は 4、小数部分は 0.9 でなければならない。(ii) と (iii) では方程式が入り組んでいるが、3 つの式をすべて足し合わせると、各 $\lfloor t \rfloor + \{t\}$ がまとまって t に戻る。こうして 1 本のすっきりした一次方程式が得られ、そこからもとの各方程式を引くと、未知数がちょうど「整数と小数部分の和」の形に分離される。

解答

以下では次の事実を用いる。n が整数で $0 \le f < 1$ かつ $n + f = c$ ならば、$n = \lfloor c \rfloor$ かつ $f = \{c\}$ である。これは $n \le c < n+1$ であることから、n が c を超えない最大の整数として定まるからである。

小問 (i)

第 1 式において、$\lfloor x \rfloor$ は整数であり $0 \le \{y\} < 1$ であるから、

$$\lfloor x \rfloor = 4, \qquad \{y\} = 0.9.$$

第 2 式において、$\lfloor y \rfloor$ は整数であり $0 \le \{x\} < 1$ であるから、$\lfloor y \rfloor = \lfloor -1.4 \rfloor = -2$ かつ $\{x\} = -1.4 - (-2) = 0.6$ である。よって

$$x = 4 + 0.6 = 4.6, \qquad y = -2 + 0.9 = -1.1.$$

これらは両方の式を満たし（$4+0.9=4.9$ および $0.6-2=-1.4$）、しかもこれが唯一の解であることが示された。

小問 (ii)

3 つの式を足し合わせる。x、y、z はそれぞれ単独で 1 回ずつ現れ、さらに異なる 2 つの式にまたがって $\lfloor\cdot\rfloor+\{\cdot\}$ に分かれた形でもう 1 回現れる。

$$(x+y+z)+(\{x\}+\lfloor x\rfloor)+(\lfloor y\rfloor+\{y\})+(\{z\}+\lfloor z\rfloor)=3.9+5.3+5,$$

すなわち $2(x+y+z)=14.2$ であるから、

$$x+y+z=7.1.$$

考えてみよう $x+y+z$ がわかった今、もとの方程式の 1 つを引くと何が残るだろうか。

$x+y+z=7.1$ から第 1 式を引くと、x が消えて $y-\lfloor y\rfloor$ と $z-\{z\}$ が残る。

$$\{y\}+\lfloor z\rfloor=7.1-3.9=3.2,$$

これが求める結果である。同様に、第 2 式と第 3 式を引くと

$$\lfloor x\rfloor+\{z\}=7.1-5.3=1.8,\qquad \{x\}+\lfloor y\rfloor=7.1-5=2.1.$$

これらはいずれも「整数と小数部分の和」の形であるから、

$$\begin{aligned}\lfloor z\rfloor&=3, & \{y\}&=0.2,\\ \lfloor x\rfloor&=1, & \{z\}&=0.8,\\ \lfloor y\rfloor&=2, & \{x\}&=0.1.\end{aligned}$$

したがって $x=1.1$、$y=2.2$、$z=3.8$ である。これが唯一可能な解であり、実際に条件を満たす。

$$1.1+2+0.8=3.9,\qquad 0.1+2.2+3=5.3,\qquad 1+0.2+3.8=5.$$

小問 (iii)

同じ工夫が使える。$2\lfloor y\rfloor+2\{y\}=2y$ に注意して 3 つの式を足し合わせると、

$$2x+4y+2z=14.2,\qquad \text{ゆえに}\qquad x+2y+z=7.1.$$

ここから各式を順に引くと

$$2\{y\}+\lfloor z\rfloor=3.2,\qquad \lfloor x\rfloor+\{z\}=1.8,\qquad \{x\}+2\lfloor y\rfloor=2.1.$$

真ん中の式はおなじみの形であるから、$\lfloor x \rfloor = 1$ かつ $\{z\} = 0.8$ である。

3 番目の式では、$2\lfloor y \rfloor$ はやはり整数であり $0 \leq \{x\} < 1$ であるから、先ほどの議論がそのまま使える。すなわち $2\lfloor y \rfloor = 2$ かつ $\{x\} = 0.1$ である。よって $\lfloor y \rfloor = 1$ であり、$x = 1.1$ となる。

考えてみよう 1 番目の式でも、答えはただ一つに決まるだろうか。

決まらない。ここで $2\{y\}$ は $[0,1)$ ではなく $[0,2)$ に属するので、3.2 を整数と $[0,2)$ に属する数の和として表す方法は 2 通りある。

- $\lfloor z \rfloor = 3$、$2\{y\} = 0.2$ であり、したがって $\{y\} = 0.1$。
- $\lfloor z \rfloor = 2$、$2\{y\} = 1.2$ であり、したがって $\{y\} = 0.6$。

（$\lfloor z \rfloor \geq 4$ ならば $2\{y\} < 0$ となり、$\lfloor z \rfloor \leq 1$ ならば $2\{y\} \geq 2.2$ となる。どちらも不可能である。）$\lfloor y \rfloor = 1$ および $\{z\} = 0.8$ と合わせると、次の 2 つの候補が得られる。

$$(x,y,z) = (1.1,\ 1.1,\ 3.8) \qquad \text{または} \qquad (x,y,z) = (1.1,\ 1.6,\ 2.8).$$

どちらももとの連立方程式を満たす。

$$(1.1,1.1,3.8): \quad 1.1+2+0.8=3.9, \quad 0.1+2.2+3=5.3, \quad 1+0.2+3.8=5;$$
$$(1.1,1.6,2.8): \quad 1.1+2+0.8=3.9, \quad 0.1+3.2+2=5.3, \quad 1+1.2+2.8=5.$$

よって、(iii) の連立方程式の解はちょうどこの 2 つである。

検算

上で行ったように、答えをもとの式に代入すると、どの式も成り立つ。独立した確認として、x と y を $[-10,10]$ に含まれる 0.1 の倍数すべてにわたって動かすコンピュータ探索を行ったところ、(i) の解はちょうど 1 つ、(ii) の解も 1 つ、(iii) の解はちょうど上の 2 つであった。また、(ii) の解について $\{y\} + \lfloor z \rfloor = 0.2 + 3 = 3.2$ となっており、確かにそうなるべき値になっている。

よくある間違い

- 負の数の床関数（floor）の値を誤ること。$\lfloor -1.4 \rfloor = -2$ であって -1 ではない。したがって (i) では $\{x\} = 0.6$ である。
- (iii) で $2\{y\}$ を小数部分だと思い込み、解を 1 つしか見つけないこと。$2\{y\}$ は $[0,2)$ に属するので、2 つ目の解が現れるのである。

- 候補をもとの方程式で確かめないこと。上の推論が示しているのは、それらが唯一可能な候補だということだけである。

STEP のその先へ

$x = \lfloor x \rfloor + \{x\}$ と書くことは、1 を法として（modulo 1）考えることと同じである。小数部分とは、円周 $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ における x の像にほかならない。床関数と小数部分は整数論（number theory）のいたるところに現れる。たとえば、$n!$ を割り切る素数の冪の指数を与えるルジャンドル（Legendre）の公式や、無理数 α に対して $n\alpha$ の小数部分が $[0,1)$ 上にどのように散らばるかという研究がその例である。Davenport の *The Higher Arithmetic*（『高等算術』）は、こうした一連の考え方へのすばらしい入門書である。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。