解答例

STEP II 2021、第 2 問

純粋数学 • 解の対称式

> **STEP II 2021、問 2**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は、OCR が配布している 2021 年の STEP 過去問一式（zip ファイル）のうち、STEP II の問題用紙にある：
>
> www.ocr.org.uk/Images/696588-2021-past-papers.zip

鍵となる考え方

2 つの数の冪乗の和（sums of powers）は、たった 2 つの量、すなわちそれらの和と積によって決まる。$a+b$ と a^2+b^2 がわかれば積 ab が決まり、したがって a^3+b^3 も決まる。これが小問 (i) の制約条件である。小問 (iii) では、c を「取り除いて」同じ事実を用いる。3 変数の和から c, c^2, c^3 を引くと 2 変数の和が残り、小問 (i) の制約条件は c が満たすべき三次方程式（cubic equation）に変わるのである。

解答

小問 (i)

$(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$ より $p^2 = q+2ab$ であるから、

$$ab = \frac{p^2-q}{2}.$$

次に因数分解（factorisation）$a^3+b^3 = (a+b)^3 - 3ab(a+b)$ を用いると、

$$\begin{aligned} r = a^3+b^3 &= p^3 - 3p\cdot\frac{p^2-q}{2} \\ &= \frac{2p^3-3p^3+3pq}{2} = \frac{3pq-p^3}{2}. \end{aligned}$$

よって、求める通り $3pq-p^3 = 2r$ である。ここでは p, q, r が実数であることを一切用いていない点に注意しよう。この恒等式（identity）は任意の複素数（complex number）a, b について成り立つ。これは小問 (iii) で必要になる。

小問 (ii)

二次方程式（quadratic equation）$2x^2 - 2px + (p^2 - q) = 0$ は、解の公式（quadratic formula）により常に2つの解をもつ（等しいこともあり、実数でないこともある）。それらを a, b とおく。両辺を2で割ると、この二次式は $x^2 - px + \frac{1}{2}(p^2 - q)$ となるから、

$$a + b = p, \qquad ab = \frac{p^2 - q}{2}.$$

これで $(*)$ の第1式がただちに得られる。さらに

$$a^2 + b^2 = (a + b)^2 - 2ab = p^2 - (p^2 - q) = q,$$

これが第2式であり、

$$a^3 + b^3 = (a + b)^3 - 3ab(a + b) = p^3 - \frac{3p(p^2 - q)}{2} = \frac{3pq - p^3}{2} = r,$$

最後の等号では仮定 $3pq - p^3 = 2r$ を用いた。以上より、$(*)$ の3つの式はすべて成り立つ。

この二次方程式の選び方は偶然ではない。小問 (i) から ab がどうあるべきかがわかっており、和が p、積が $\frac{1}{2}(p^2 - q)$ である2つの解をもつ二次式は、まさに $x^2 - px + \frac{1}{2}(p^2 - q)$ なのである。

小問 (iii)

次のようにおく。

$$p = a + b = s - c, \qquad q = a^2 + b^2 = t - c^2, \qquad r = a^3 + b^3 = u - c^3.$$

考えてみよう 小問 (i) では p, q, r が実数であると仮定していたが、ここではそれらは複素数かもしれない c を含んでいる。それでも小問 (i) を使えるだろうか。

使える。小問 (i) の最後で述べたように、そこでの議論は純粋に代数的なもので、実数であることは一度も用いていない。したがって $3pq - p^3 = 2r$、すなわち

$$3(s - c)(t - c^2) - (s - c)^3 = 2(u - c^3).$$

展開すると

$$3(s - c)(t - c^2) = 3st - 3sc^2 - 3tc + 3c^3,$$
$$(s - c)^3 = s^3 - 3s^2c + 3sc^2 - c^3,$$

であるから、方程式は

$$3st - 3sc^2 - 3tc + 3c^3 - s^3 + 3s^2c - 3sc^2 + c^3 = 2u - 2c^3.$$

となる。c の冪ごとに整理すると

$$6c^3 - 6sc^2 + 3(s^2 - t)c + 3st - s^3 - 2u = 0.$$

よって、求める通り c は $6x^3 - 6sx^2 + 3(s^2 - t)x + 3st - s^3 - 2u = 0$ の解である。

係数は s, t, u のみに依存し、これらは a, b, c について対称（symmetric）である。c の役割を a（または b）に置き換えて同じ議論を繰り返せば、a と b も解であることがわかる。したがって、残りの 2 つの解は a と b である。

考えてみよう a, b, c が相異なる（distinct）ことはなぜ重要なのだろうか。

三次方程式の解は高々 3 個である。a, b, c は 3 つの**相異なる**解であるから、これらが解のすべてであり、いずれも単解（simple root）である。よって

$$6x^3 - 6sx^2 + 3(s^2 - t)x + 3st - s^3 - 2u = 6(x - a)(x - b)(x - c).$$

（たとえば $a = b$ であれば、わかっている解は 2 つだけとなり、3 つ目の解を特定できない。）定数項を比較すると $3st - s^3 - 2u = -6abc = -6v$、すなわち

$$s^3 - 3st + 2u = 6v.$$

小問 (iv)

ここでは $s = 3, t = 1, u = -3, v = 2$ である。まず整合性を確認する。小問 (iii) の条件は $27 - 9 - 6 = 12 = 6 \times 2$ となり、成り立っている。小問 (iii) によれば、a, b, c は

$$6x^3 - 18x^2 + 3(9 - 1)x + 9 - 27 + 6 = 6x^3 - 18x^2 + 24x - 12 = 0,$$

すなわち $x^3 - 3x^2 + 4x - 2 = 0$ の解であるはずである。$x = 1$ とすると $1 - 3 + 4 - 2 = 0$ であるから、

$$x^3 - 3x^2 + 4x - 2 = (x - 1)(x^2 - 2x + 2) = (x - 1)((x - 1)^2 + 1),$$

よって解は $1, 1 + \mathrm{i}, 1 - \mathrm{i}$ である。そこで

$$a = 1, \qquad b = 1 + \mathrm{i}, \qquad c = 1 - \mathrm{i}.$$

とおく。小問 (iii) はどこを探せばよいかを教えてくれたにすぎないので、ここで実際に確かめなければならない。

▶ $a + b + c = 1 + (1 + \mathrm{i}) + (1 - \mathrm{i}) = 3$。

- $(1+\mathrm{i})^2 = 2\mathrm{i}$ かつ $(1-\mathrm{i})^2 = -2\mathrm{i}$ であるから、$a^2+b^2+c^2 = 1+2\mathrm{i}-2\mathrm{i} = 1$。
- $(1+\mathrm{i})^3 = 2\mathrm{i}(1+\mathrm{i}) = -2+2\mathrm{i}$ かつ $(1-\mathrm{i})^3 = -2\mathrm{i}(1-\mathrm{i}) = -2-2\mathrm{i}$ であるから、$a^3+b^3+c^3 = 1-4 = -3$。
- $abc = 1\cdot(1+\mathrm{i})(1-\mathrm{i}) = 1\cdot 2 = 2$。

$(**)$ の 4 つの式はすべて成り立つ。（これら 3 つの数をどのように並べ替えても同様に成り立つ。）

検算

- 小問 (i) で $a=1, b=2$ とすると、$p=3, q=5, r=9$ であり、$3pq-p^3 = 45-27 = 18 = 2r$。
- 小問 (iii) で $a,b,c = 1,2,3$ とすると、$s=6, t=14, u=36, v=6$ であり、$s^3-3st+2u = 216-252+72 = 36 = 6v$。三次式は $6x^3-36x^2+66x-36 = 6(x-1)(x-2)(x-3)$ となり、期待通りである。
- 小問 (i)–(iii) の恒等式は、ランダムに選んだ多数の複素数 a, b, c についてコンピュータでも確認した。

よくある間違い

- 小問 (iii) で、三次式の係数が a, b, c について対称であることに触れずに「a と b が残りの解である」と述べてしまう。
- 相異なることを用いて a, b, c が解の**すべて**であると確認せずに、解の積から $s^3-3st+2u = 6v$ を導いてしまう。
- 小問 (iv) で、三次方程式の解を求めたところで止めてしまう。問題は 4 つの式を明示的に確かめることを求めている。

STEP のその先へ

この問題は、冪和 $a^k+b^k+c^k$ と基本対称式（elementary symmetric functions）$a+b+c$, $ab+bc+ca$, abc を結びつけるニュートンの恒等式（Newton's identities）の小さな場合である。対称式の基本定理（fundamental theorem of symmetric polynomials）は、あらゆる対称多項式が基本対称式を用いて表せることを主張しており、これはガロア理論（Galois theory）の出発点である。さらに詳しくは Allenby, *Rings, Fields and Groups*（環・体・群）を参照のこと。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。