解答例

STEP II 2021、第 12 問

確率・統計 ・ 破産問題

> **STEP II 2021、問 12**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は、OCR が配布している 2021 年の STEP 過去問一式（zip ファイル）のうち、STEP II の問題用紙にある：
>
> www.ocr.org.uk/Images/696588-2021-past-papers.zip

鍵となる考え方

どちらの試合も、以前に経験した状態へ何度も戻ってくる。そこで、勝ち方を無限に列挙して足し合わせることはしない。その状態から勝つ確率を P とおき、次に何が起こるかで条件付け（conditioning）を行うと、両辺に P が現れる方程式が得られる。同じ手法を慎重なゲームに適用すると、それは小問 (ii) の試合に帰着する。

解答

小問 (i)

A が試合に勝つ確率を P とする。最初のゲームで条件付けを行う。A は確率 p_{A} でそのゲームに勝ち、試合は終了する。B は確率 p_{B} でそのゲームに勝ち、A は負けとなる。それ以外の場合、すなわち確率 $1-p_{\mathrm{A}}-p_{\mathrm{B}}$ でゲームは引き分けとなり、各ゲームは独立（independent）であるから試合は最初からやり直しとなる。よって、そこから A が勝つ確率は再び P である。したがって

$$P = p_{\mathrm{A}} + (1-p_{\mathrm{A}}-p_{\mathrm{B}})P \quad\Longrightarrow\quad (p_{\mathrm{A}}+p_{\mathrm{B}})P = p_{\mathrm{A}} \quad\Longrightarrow\quad P = \frac{p_{\mathrm{A}}}{p_{\mathrm{A}}+p_{\mathrm{B}}},$$

ここで $p_{\mathrm{A}}+p_{\mathrm{B}} > 0$ で割った。（同値な方法として、A が第 k ゲームで勝つ確率は $(1-p_{\mathrm{A}}-p_{\mathrm{B}})^{k-1}p_{\mathrm{A}}$ であり、$0 < p_{\mathrm{A}}+p_{\mathrm{B}} < 1$ であるからこの等比級数（geometric series）は収束する。）

小問 (ii)

何ゲームか行った後の、A の勝ち数から B の勝ち数を引いた値を D とする。各ゲームで D は $+1$ または -1 だけ変化し、初めて $|D| = 2$ となった時点で試合は終わる。

長さが偶数であること。 n ゲーム後に A の勝ちが a、B の勝ちが b であるとすると、$a + b = n$ かつ $D = a - b = n - 2b$ であるから、D と n の偶奇（parity）は一致する。試合が終わるのは $D = \pm 2$ のときであり、これは偶数であるから、n は偶数である。

確率。 ゲームを 2 つずつ組にして考える。開始時点で試合は互角（$D = 0$）であり、試合は偶数回のゲームの後にしか終わらないから、試合を終わらせなかった組の後では毎回再び互角になる。互角の状態から、続く 2 ゲームは確率 p^2 で AA（A の勝ち）、確率 q^2 で BB（B の勝ち）、合計確率 $2pq$ で AB または BA となり、後者の場合は再び互角に戻る。互角の状態から A が勝つ確率を P とすると、

$$P = p^2 + 2pq\,P \quad \Longrightarrow \quad P = \frac{p^2}{1 - 2pq}.$$

$p + q = 1$ より $1 = (p+q)^2 = p^2 + 2pq + q^2$ であるから $1 - 2pq = p^2 + q^2$ となり、

$$P = \frac{p^2}{p^2 + q^2},$$

が示された。ここで $p^2 + q^2 > 0$ であるから、この割り算は問題ない。

小問 (iii)

慎重な方式。 トークンの枚数は各ラウンドで 1 ずつ増減し、1 から始まって 0（負け）または 4（勝ち）で止まる。4 を飛び越えることはできないから、プレイヤーが勝つのは、枚数が 0 より先に 4 に達するときであり、そのときに限る。

> ? **考えてみよう** トークンが 2 枚の状態から、プレイヤーには何が必要か。これは以前に見たことがあるだろうか。

トークンが 2 枚の状態から、プレイヤーが勝つのは、ラウンドの勝ち数が負け数を 2 上回る（4 に達する）のが、負け数が勝ち数を 2 上回る（0 に達する）より先に起こるときである。これはプレイヤーを A、賭けのゲームを B とした小問 (ii) の試合そのものである。よって、トークンが 2 枚の状態から勝つ確率は $\dfrac{p^2}{p^2 + q^2}$ である。

トークンが 1 枚の状態からは、最初のラウンドに勝たなければならない。さもなければ 0 枚になって負ける。したがって最初のラウンドで確率 p でトークンは 2 枚になり、各ラウンドは独立であるから、

$$P_{\text{cautious}} = p \cdot \frac{p^2}{p^2 + q^2} = \frac{p^3}{p^2 + q^2}.$$

（方程式を使いたければ、トークン k 枚の状態から勝つ確率を P_k として、$P_1 = pP_2$、$P_2 = pP_3 + qP_1$、$P_3 = p + qP_2$ から同じ答えが得られる。）

大胆な方式。 トークン 1 枚からは枚数は 2 か 0 になり、2 枚からは 4 か 0 になる。したがってプレイヤーが勝つのは最初の 2 ラウンドに勝つときだけである：

$$P_{\text{bold}} = p^2.$$

比較。 どちらの確率も正であるから、その比を 1 と比較する：

$$\frac{P_{\text{cautious}}}{P_{\text{bold}}} = \frac{p}{p^2+q^2}.$$

$p^2 + q^2 > 0$ であるから、この比が 1 より大きいのは

$$p > p^2+q^2 \iff p - p^2 > q^2 \iff pq > q^2 \iff p > q,$$

のとき、かつそのときに限る。最後の段階では $q > 0$ で割った（$p < 1$ であるから正当である）。そして $p > q = 1 - p$ となるのはちょうど $p > \frac{1}{2}$ のときである。同様に、比が 1 より小さいのはちょうど $p < q$、すなわち $p < \frac{1}{2}$ のときである。よって、$\frac{1}{2} < p < 1$ のときは慎重な方式が有利であり、$0 < p < \frac{1}{2}$ のときは大胆な方式が有利である。（$p = \frac{1}{2}$ ではどちらも $\frac{1}{4}$ となる。）

検算

- $p = \frac{1}{2}$ のとき、慎重なゲームは対称なランダムウォーク（random walk）であり、1 から出発して 0 より先に 4 に達する確率は $\frac{1}{4}$ である。我々の公式は $\frac{1}{8}/\frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ を与え、大胆なゲームの $p^2 = \frac{1}{4}$ と一致する。
- $p = 0.7$ のとき：慎重な方式は $0.343/0.58 \approx 0.591$、大胆な方式は 0.49 となる。$p = 0.3$ のとき：慎重な方式は $0.027/0.58 \approx 0.0466$、大胆な方式は 0.09 となる。いずれも、トークン枚数の分布をラウンドごとに追跡するコンピュータによる検証と一致する。
- 小問 (ii) で $p = \frac{1}{2}$ とすると $\frac{1}{2}$ となり、対称性から要請されるとおりである。

よくある間違い

- 小問 (ii) で、「AB」と「BA」を確率 $2pq$ ではなく確率 pq の 1 つの結果として扱ってしまう。
- 試合を終わらせなかったゲームの組の後では必ず互角に戻ることの正当化を忘れる。実際に互角に戻るのは、試合が奇数回のゲームの後には終わり得ないからである。

▶ 比較の際に、量が正であることを述べずに展開したり割り算したりする。

STEP のその先へ

慎重なゲームは**賭博者の破産問題**（gambler's ruin）である。これは吸収壁（absorbing barriers）をもつランダムウォークであり、k から出発して目標を N とする場合の一般的な答えは、$p \neq q$ のとき $\dfrac{1-(q/p)^k}{1-(q/p)^N}$ である。不利なゲームでは大胆な賭け方が最善であり、有利なゲームでは控えめな賭け方が最善であるという結果は、Dubins と Savage による最適な賭け方の研究にさかのぼる。Grimmett と Welsh の *Probability: An Introduction*（確率論入門）は、まさにこの種の第一歩での条件付けによって、ランダムウォークと賭博者の破産問題を扱っている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。