解答例

STEP II 2021、第 11 問

確率・統計 ・ 条件付き確率の漸化式

> **STEP II 2021、問 11**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は、OCR が配布している 2021 年の STEP 過去問一式（zip ファイル）のうち、STEP II の問題用紙にある：
>
> www.ocr.org.uk/Images/696588-2021-past-papers.zip

この問題は、*Beyond STEP* の第 12.5 節「**最後の乗客の座席**」で詳しく解説されている：
https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/ch12/airline-seat.html

鍵となる考え方

T_1 がどこに座るかで条件付ける（condition）。T_1 が自分の席 S_1 に座れば、他の全員は何の問題もない。T_1 が S_k に座れば、$T_2, \ldots, T_{k-1}$ は無事に自分の席に座り、T_k が新たな「無作為に選ぶ人」となる。決定的に重要なのは、このとき T_k が、かつての T_1 とまったく同じ立場に置かれるという観察である。ただし列車は小さくなり、空いている席 S_1 が T_k 自身の席の役割を果たす。これにより問題は漸化式（recurrence）に帰着する。

解答

以下、「T_r が追い出される」とは、T_r が来たときに S_r がすでに埋まっていることを意味する。無作為に（at random）席を選ぶのは、追い出された乗客（または T_1）だけである。

小問 (i)

$n = 2$ のとき、T_1 はそれぞれ確率（probability）$\frac{1}{2}$ で S_1 または S_2 に座り、T_2 が S_2 に座れるのは T_1 が S_1 に座ったときに限る。よって

$$P_2 = \frac{1}{2}.$$

$n = 3$ のとき、T_1 の座る席で条件付ける。各場合の確率は $\frac{1}{3}$ である。

- S_1：T_2 と T_3 はどちらも自分の席が空いているので、T_3 は S_3 に座れる。
- S_3：T_3 は確実に S_3 に座れない。
- S_2：T_2 が追い出され、S_1 と S_3 から無作為に選ぶ。T_3 が S_3 に座れるのは T_2 が S_1 を選んだときに限り、その確率は $\frac{1}{2}$ である。

よって

$$P_3 = \tfrac{1}{3} \cdot 1 + \tfrac{1}{3} \cdot 0 + \tfrac{1}{3} \cdot \tfrac{1}{2} = \tfrac{1}{2}.$$

小問 (ii)

T_1 が S_k（ただし $2 \le k \le n-1$）に座ったとする。すると $T_2, \ldots, T_{k-1}$ は全員自分の席が空いているので、そこに座る。T_k が来たとき、空いている席は

$$S_1,\ S_{k+1},\ S_{k+2},\ \ldots,\ S_n,$$

の $n-k+1$ 席であり、T_k はこれらの中から一様に（uniformly）無作為に選ぶ。まだ来ていない乗客は $T_{k+1}, \ldots, T_n$ で、それぞれ自分の席を望んでおり、まだ来ていない者の中に S_1 を割り当てられた者はいない。

考えてみよう なぜこれは、$n-k+1$ 席の元の問題とまったく同じなのか？

ラベルを付け替える。T_k を「最初の乗客」と呼び、S_1 を T_k に割り当てられた席とみなす。m 席の元の問題では、最初の乗客は m 席すべての中から一様に選び、後の各乗客は自分の席が空いていればそこに座り、そうでなければ空いている席の中から一様に選ぶ。そして最初の乗客に割り当てられた席を望む者は他にいない。今の場合、$m = n-k+1$ として、乗客 $T_k, T_{k+1}, \ldots, T_n$ は席 $S_1, S_{k+1}, \ldots, S_n$ についてまさにこの規則に従い、S_1 を望む者は他にいない。規則が席のラベルを使うのは、乗客自身の席が空いているかを判定するときだけであるから、二つの過程の確率はまったく同じである。小さい方の問題でも T_n は依然として最後の乗客であるから、

$$\mathrm{P}(T_n \text{ の座る席が} S_n \mid T_1 \text{ の座る席が} S_k) = P_{n-k+1}.$$

さて、$n \ge 3$ のとき、T_1 の座る席で条件付ける。$S_1, \ldots, S_n$ のそれぞれの確率は $\frac{1}{n}$ である。それが S_1 ならば T_n は確実に S_n に座れ、S_n ならば T_n は確実に座れない。よって全確率の法則（law of total probability）により、

$$P_n = \frac{1}{n} \cdot 1 + \frac{1}{n} \sum_{k=2}^{n-1} P_{n-k+1} + \frac{1}{n} \cdot 0 = \frac{1}{n} \left(1 + \sum_{r=2}^{n-1} P_r \right),$$

ここで $r = n-k+1$ と置き換えた。これは、k が 2 から $n-1$ まで動くとき、$n-1$ から 2 まで減少しながら動く。これが求める結果である。

小問 (iii)

すべての $n \geq 2$ について $P_n = \frac{1}{2}$ であることを示す。累積帰納法（strong induction）を用いる。

基底段階。 小問 (i) より $P_2 = \frac{1}{2}$ である。

帰納段階。 $n \geq 3$ とし、$r = 2, 3, \ldots, n-1$ について $P_r = \frac{1}{2}$ であると仮定する。小問 (ii) の和は $n-2$ 項からなり、各項は $\frac{1}{2}$ に等しいので、

$$P_n = \frac{1}{n}\left(1 + \frac{n-2}{2}\right) = \frac{1}{n} \cdot \frac{n}{2} = \frac{1}{2}.$$

よって $r = 2, \ldots, n$ について $P_r = \frac{1}{2}$ であり、帰納法により、すべての $n \geq 2$ について $P_n = \frac{1}{2}$ である。（小問 (i) で求めた $P_3 = \frac{1}{2}$ とも一致する。）

小問 (iv)

$n = 2$ のとき $T_{n-1} = T_1$ であり、この乗客は確率 $\frac{1}{2}$ で S_1 に座る。よって $Q_2 = \frac{1}{2}$ である。

次に $n \geq 3$ とする。このとき T_{n-1} は T_1 ではない。再び T_1 の座る席 S_k で条件付ける。

- $k = 1$：全員が自分の席に座るので、T_{n-1} は S_{n-1} に座れる。
- $k = n$：$T_2, \ldots, T_{n-1}$ は全員自分の席が空いているので、やはり T_{n-1} は S_{n-1} に座れる。
- $k = n-1$：T_{n-1} は確実に S_{n-1} に座れない。
- $2 \leq k \leq n-2$：小問 (ii) とまったく同様に、残りの過程は T_k を先頭とする $m = n-k+1$ 席の元の問題になる。その小さい列車において T_{n-1} は最後から二番目の乗客であるから、確率は Q_{n-k+1} である。ここで m は $3, 4, \ldots, n-1$ の範囲を動く。

したがって、$n \geq 3$ のとき

$$Q_n = \frac{1}{n}\left(2 + \sum_{m=3}^{n-1} Q_m\right).$$

$n = 3$ のとき和は空であり、$Q_3 = \frac{2}{3}$ である。$3 \leq m \leq n-1$ について $Q_m = \frac{2}{3}$ ならば、

$$Q_n = \frac{1}{n}\left(2 + \frac{2(n-3)}{3}\right) = \frac{1}{n} \cdot \frac{2n}{3} = \frac{2}{3},$$

となるので、累積帰納法により、すべての $n \geq 3$ について $Q_n = \frac{2}{3}$ である。まとめると、

$$Q_2 = \tfrac{1}{2}, \qquad Q_n = \tfrac{2}{3} \quad (n \geq 3).$$

考えてみよう 漸化式を使わずに $\frac{1}{2}$ や $\frac{2}{3}$ を見抜く方法はあるだろうか？

ある。誰かが無作為に選ぶときはいつでも、S_1 と、後から来る乗客のまだ空いている各席とは同等に扱われる。したがって、過程が終わるまでの間、席 S_1 と S_n のどちらが先に埋まるかは等確率である。T_n が成功するのは S_1 が先に埋まるときに限るので、確率は $\frac{1}{2}$ となる。T_{n-1} については（$n \geq 3$ として）、S_1, S_{n-1}, S_n のうちどれが無作為に選ぶ人によって最初に埋められるかを見る。どれも等確率であり、T_{n-1} が追い出されるのはそれが S_{n-1} のときに限るので、確率は $1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$ となる。

検算

- $n = 3$ の場合は手で列挙できる。(T_1, T_2, T_3) の結果は、確率 $\frac{1}{3}$ で (S_1, S_2, S_3)、確率 $\frac{1}{3}$ で (S_3, S_2, S_1)、そしてそれぞれ確率 $\frac{1}{6}$ で (S_2, S_1, S_3) と (S_2, S_3, S_1) である。よって T_3 が S_3 に座る確率は $\frac{1}{2}$、T_2 が S_2 に座る確率は $\frac{2}{3}$ であり、上で求めた結果と一致する。
- $n = 2, \ldots, 8$ について、起こりうるすべての乗車過程をコンピュータで厳密に列挙すると、常に $P_n = \frac{1}{2}$、$n \geq 3$ では $Q_n = \frac{2}{3}$ となり、小問 (ii) の条件付き確率もすべての k について確かめられる。$n = 20$ として 10^5 回の乗車過程をシミュレーションしたところ、0.500 と 0.668 が得られた。

よくある間違い

- T_1 が S_1 そのものを選びうることを忘れる。これが漸化式の「$1+$」を生む。
- 小問 (iv) で、T_1 が S_n に座る場合を見落とす。これは T_{n-1} にとっては好都合な場合であり、定数は 1 ではなく 2 になる。
- Q の漸化式を $n = 2$ に適用してしまう。このとき T_{n-1} は T_1 であり、答えは $\frac{2}{3}$ ではなく $\frac{1}{2}$ である。

STEP のその先へ

ここでの漸化式は第一歩解析（first-step analysis）である。すなわち、最初の無作為な選択で条件付け、同じ問題の小さな複製を見いだすのである。同じ手法により、マルコフ連鎖（Markov chain）の到達確率や期待到達時間が求められる。これは大学 1 年次の確率論の中心的な話題である。上の対称性による議論は、うまく選んだ「どちらが先に起こるか？」という問いが長い計算に取って代わりうることを垣間見せてくれ

る。Grimmett と Welsh による *Probability: An Introduction*（確率論入門）は、この両方の考え方を展開している。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。