解答例

STEP II 2021、第 10 問

力学 ・ 非慣性系

> **STEP II 2021、問 10**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は、OCR が配布している 2021 年の STEP 過去問一式（zip ファイル）のうち、STEP II の問題用紙にある：
>
> www.ocr.org.uk/Images/696588-2021-past-papers.zip

この問題は、*Beyond STEP* の第 11.5 節「**加速する列車の中の重力**」で詳しく解説されている：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/ch11/accelerating-frame.html

鍵となる考え方

座標軸は列車とともに動くので、慣性系（inertial frame）ではない。最もすっきりした対処法は、ビーズの**真の**加速度、すなわち列車に対するビーズの相対加速度に列車自身の加速度を加えたものを求めることである。そうすればニュートンの第 2 法則（Newton's second law）が成り立つ。また、針金は滑らか（smooth）なので抗力（reaction）は針金に垂直であり、ビーズの経路に沿って仕事をしない。運動方程式（equation of motion）とビーズの（相対）速度との内積をとると、未知の抗力が消え、保存されるエネルギーのような量が残る。

解答

ビーズを質量 m の質点、針金を滑らかなものとしてモデル化する。したがって、針金がビーズに及ぼす抗力 $\mathbf{N}$ はつねに針金に垂直である。東向きと上向きの単位ベクトルをそれぞれ $\mathbf{i}$ と $\mathbf{j}$ とする。

列車は西向きに加速するので、その加速度は $-a\mathbf{i}$ である。列車に対するビーズの位置は $x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$ なので、ビーズの真の（地上から見た）加速度は

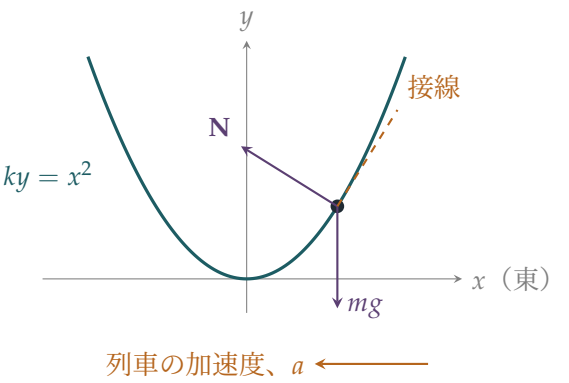
$$(\ddot{x} - a)\,\mathbf{i} + \ddot{y}\,\mathbf{j}.$$

である。ビーズにはたらく力は重力 $-mg\mathbf{j}$ と $\mathbf{N}$ だけなので、ニュートンの第 2 法則よ

り

$$m(\ddot{x}-a)\,\mathbf{i}+m\ddot{y}\,\mathbf{j}=\mathbf{N}-mg\,\mathbf{j}. \qquad (*)$$

が成り立つ。



小問 (i)

ビーズが列車に対して原点にとどまったと仮定する。するとビーズは列車と同じ加速度 $-a\mathbf{i}$ をもつので、水平方向の力 $-ma\mathbf{i}$（ただし $a>0$）が必要になる。しかし原点では針金 $y=x^2/k$ の傾きは $2x/k=0$ なので、針金はそこで水平であり、滑らかな針金からの抗力はこれに垂直、すなわち鉛直である。重力も鉛直である。水平方向の力ははたらかないので、ビーズは列車とともに加速することはできず、列車に対して動かなければならない。（ビーズの真の水平加速度は 0 であるのに対し、列車の加速度は西向きに a なので、ビーズは針金に沿って東向き、すなわち x の正の向きに滑り始める。）

小問 (ii)

ビーズが針金に沿って動く間、列車に対する相対速度 $\dot{x}\,\mathbf{i}+\dot{y}\,\mathbf{j}$ は針金に接している。針金は列車に固定されているからである。$\mathbf{N}$ は針金に垂直なので、

$$\mathbf{N}\cdot(\dot{x}\,\mathbf{i}+\dot{y}\,\mathbf{j})=0.$$

である。$(*)$ を $m(\ddot{x}-a)\,\mathbf{i}+m(\ddot{y}+g)\,\mathbf{j}=\mathbf{N}$ と変形し、両辺と $\dot{x}\,\mathbf{i}+\dot{y}\,\mathbf{j}$ との内積（scalar product）をとって m で割ると、

$$\dot{x}(\ddot{x}-a)+\dot{y}(\ddot{y}+g)=0,$$

となり、示すべき式が得られる。左辺はちょうどある関数の導関数になっている：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\tfrac{1}{2}(\dot{x}^2+\dot{y}^2)-ax+gy\right)=\dot{x}\ddot{x}+\dot{y}\ddot{y}-a\dot{x}+g\dot{y}=0,$$

よって、運動の間 $\frac{1}{2}(\dot{x}^2+\dot{y}^2)-ax+gy$ は一定である。

考えてみよう 地上から見ると抗力は仕事をするのに、相対速度との内積をとってよいのはなぜだろうか。

地上から見ると、ビーズの速度には余分な $-at\,\mathbf{i}$ が加わり、これは針金に沿った向きではないので、そこでは $\mathbf{N}$ が仕事をする。しかし恒等式 $\mathbf{N}\cdot\mathbf{u}=0$ は純粋に幾何的な事実であり、針金に接する任意のベクトル $\mathbf{u}$ について成り立つ。相対速度はそのようなベクトルである。用いたのはこれだけである。

小問 (iii)

最初は $x=y=0$ かつ $\dot{x}=\dot{y}=0$ なので、定数は 0 である。列車に対する速さを v とし、$y=x^2/k$ を用いると、

$$\tfrac{1}{2}v^2 = ax - gy = ax - \frac{gx^2}{k} = \frac{g}{k}\,x\Big(\frac{ak}{g} - x\Big). \qquad (\dagger)$$

となる。$v^2\geq 0$ なので、ビーズは $0\leq x\leq ak/g$ の範囲に限られ、$v=0$ となるのはこの区間の両端だけである。小問 (i) より、ビーズは x の正の向きに動き始める。$0<x<ak/g$ の間は速さが正なので、ビーズは $x=ak/g$ に達するまで針金に沿って同じ向きに動き続け、そこで一瞬静止する。（ビーズは実際にそこで引き返す。その点での $(*)$ の接線成分は 0 でないからである。実際、$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(ax-gx^2/k)=a-2a=-a\neq 0$ である。）その後、ビーズは $x=0$ と $x=ak/g$ の間を振動する。

この区間では $y=x^2/k$ は x について増加するので、最大の高さは $x=ak/g$ で達成される：

$$b=\frac{1}{k}\Big(\frac{ak}{g}\Big)^2=\frac{a^2k}{g^2}.$$

小問 (iv)

$(\dagger)$ より $v^2=2\big(ax-gx^2/k\big)$ であり、これは x の 2 次式で、2 つの根 0 と ak/g の中点で最大となる。よって列車に対する速さが最大となるのは

$$x=\frac{ak}{2g}.$$

のときである。そこでは

$$v^2=2\Big(\frac{a^2k}{2g}-\frac{a^2k}{4g}\Big)=\frac{a^2k}{2g},\qquad \text{よって}\qquad v_{\max}=a\sqrt{\frac{k}{2g}}.$$

検算

- 極限の場合：$a = 0$ ならビーズは単に針金の最下点にとどまり、実際 $b = 0$ かつ $v_{\max} = 0$ となる。
- 有効重力（effective gravity）：列車内では、ビーズは東に傾いた有効重力 $(a, -g)$ を感じる。最も速く動く点 $x = ak/(2g)$ は、ちょうど針金の傾き $2x/k$ が a/g に等しくなる点であり、そこで接線は有効重力に垂直になる。つまり、傾いた場における針金の「最下点」である。折り返し点 $x = ak/g$ はその 2 倍遠くにあり、これは x について 2 次のポテンシャル中での対称な振動の場合と同じである。
- 次元（dimensions）：k は長さなので、a^2k/g^2 は長さ、$a\sqrt{k/g}$ は速さである。
- 数値的に、$a = 2$、$k = 1.5$、$g = 9.8$（SI 単位）として、コンピュータで運動を逐次計算すると、最大の高さ 0.06247 m と、$x = 0.1531$ m における最大の速さ $0.5533\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ が得られ、a^2k/g^2、$a\sqrt{k/(2g)}$、$ak/(2g)$ と一致する。

よくある間違い

- ビーズの真の水平加速度を $\ddot{x}$ と書いてしまうこと。これは列車に対する相対加速度であり、列車自身の加速度 $-a$ を加えなければならない。
- a の符号を間違えること：列車は**西**向きに加速するので、列車内ではビーズは**東**向き、すなわち x の正の向きに押される。
- 速さが針金の最下点 $x = 0$ で最大になるとしてしまうこと。列車内では実質的な「下」が傾いているので、最も速い点は代わりに $x = ak/(2g)$ となる。

STEP のその先へ

小問 (ii) は、非慣性系（non-inertial frame）における力学の最初の一端である。列車の系では、項 $-ax$ は東向きの一様な「見かけの」力（fictitious force）ma に対するポテンシャルエネルギー（potential energy）のようにはたらき、これを重力に加えると傾いた有効重力が得られる。大学ではこれが、遠心力（centrifugal force）やコリオリ力（Coriolis force）が現れる回転座標系や、**N** のような拘束力（constraint force）を最初から消去するラグランジュ力学（Lagrangian mechanics）へと発展する。Kleppner and Kolenkow, *An Introduction to Mechanics*（力学入門）には、非慣性系と見かけの力についての優れた章がある。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。