解答例

STEP II 2021、第 1 問

純粋数学 ・ 三角方程式

> **STEP II 2021、問 1**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は、OCR が配布している 2021 年の STEP 過去問一式（zip ファイル）のうち、STEP II の問題用紙にある：
>
> www.ocr.org.uk/Images/696588-2021-past-papers.zip

鍵となる考え方

正弦と余弦の積は扱いにくいが、和であれば扱いやすい。そこで、冒頭の恒等式（identity）を使って積を和に置き換える。(i) では、これによって三つの積が $\cos 2x$ の 3 次式に変わり、因数がはっきり見えるようになる。(ii) では、正接（tangent）を払ってから、各因数を種類の異なる相手と組にすると、方程式全体が二つの簡単な因数の積にまとまる。特に注意が必要なのは、正接が定義されない点の扱いだけである。

解答

恒等式

加法定理（addition formulae）による展開

$$\cos(A+B) = \cos A\cos B - \sin A\sin B, \qquad \cos(A-B) = \cos A\cos B + \sin A\sin B$$

を辺々加えると $\cos(A+B)+\cos(A-B) = 2\cos A\cos B$ を得る。$A = 3a$、$B = a$ とおくと

$$\cos a\cos 3a = \tfrac{1}{2}(\cos 4a + \cos 2a),$$

となり、示すべき式が得られる。同様に、$\sin(A \pm B) = \sin A\cos B \pm \cos A\sin B$ を辺々加えると $\sin(A+B)+\sin(A-B) = 2\sin A\cos B$ を得る。$A = a$、$B = 3a$ とおき、$\sin(-2a) = -\sin 2a$ を用いると

$$\sin a\cos 3a = \tfrac{1}{2}(\sin 4a - \sin 2a).$$

（役割を入れ替えて $A = 3a$、$B = a$ とおくと、対となる式 $\cos a\sin 3a = \frac{1}{2}(\sin 4a + \sin 2a)$ が得られる。これも後で必要になる。）

小問 (i)

第一の恒等式により $4\cos x\cos 2x\cos 3x = 2\cos 2x\,(\cos 4x + \cos 2x)$ である。$c = \cos 2x$ とおくと $\cos 4x = 2c^2 - 1$ である。方程式は

$$2c\,(2c^2 + c - 1) = 1 \quad \Longleftrightarrow \quad 4c^3 + 2c^2 - 2c - 1 = 0.$$

となる。項を二つずつ組にすると $2c^2(2c+1) - (2c+1) = 0$、すなわち

$$(2c+1)(2c^2 - 1) = 0,$$

であるから、$\cos 2x = -\frac{1}{2}$ または $\cos 2x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$ である。

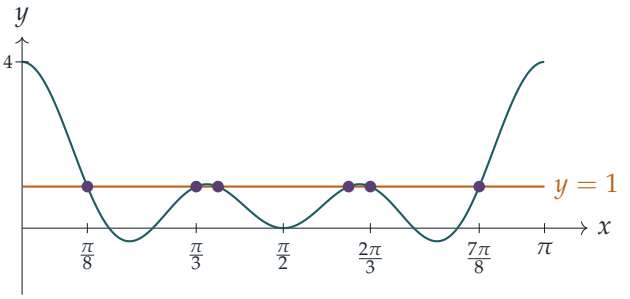
$0 \le x \le \pi$ のとき $0 \le 2x \le 2\pi$ であり、-1 と 1 の間（両端を除く）にある $\cos 2x$ の各値に対して、この範囲の $2x$ の値が二つずつ対応する。

$$\begin{aligned}
\cos 2x = -\tfrac{1}{2} &\implies 2x = \tfrac{2\pi}{3},\ \tfrac{4\pi}{3} &&\implies x = \tfrac{\pi}{3},\ \tfrac{2\pi}{3};\\
\cos 2x = \tfrac{1}{\sqrt{2}} &\implies 2x = \tfrac{\pi}{4},\ \tfrac{7\pi}{4} &&\implies x = \tfrac{\pi}{8},\ \tfrac{7\pi}{8};\\
\cos 2x = -\tfrac{1}{\sqrt{2}} &\implies 2x = \tfrac{3\pi}{4},\ \tfrac{5\pi}{4} &&\implies x = \tfrac{3\pi}{8},\ \tfrac{5\pi}{8}.
\end{aligned}$$

どの段階も逆にたどれるので、解は

$$x = \frac{\pi}{8},\ \frac{\pi}{3},\ \frac{3\pi}{8},\ \frac{5\pi}{8},\ \frac{2\pi}{3},\ \frac{7\pi}{8}.$$

である。グラフからも、直線 $y = 1$ との交点がちょうど六つであることが確かめられる。



小問 (ii)

$\tan x = \tan 2x \tan 3x \tan 4x$ であるとする。この式が意味をもつためには四つの正接がすべて定義されていなければならないので、$\cos x$、$\cos 2x$、$\cos 3x$、$\cos 4x$ はすべて 0 でない。したがって両辺に $\cos x\cos 2x\cos 3x\cos 4x$ を掛けてよく、

$$\sin x\cos 3x \cdot \cos 2x\cos 4x = \cos x\sin 3x \cdot \sin 2x\sin 4x.$$

を得る。

考えてみよう なぜ $\sin x$ を $\cos 3x$ と、$\cos x$ を $\sin 3x$ と組にするのか？

それは、これらがまさに先の恒等式で和に変換できる積であり、しかもどちらの和も、方程式の他の部分にすでに現れている $\sin 4x$ と $\sin 2x$ だけで表されるからである。$\sin x \cos 3x = \frac{1}{2}(\sin 4x - \sin 2x)$ と $\cos x \sin 3x = \frac{1}{2}(\sin 4x + \sin 2x)$ を用いて両辺を 2 倍すると

$$(\sin 4x - \sin 2x)\cos 2x \cos 4x = (\sin 4x + \sin 2x)\sin 2x \sin 4x.$$

となる。ここで左辺の $\sin 2x \cos 2x$ を $\frac{1}{2}\sin 4x$ で置き換えると、すべての項が因数 $\sin 4x$ をもつ。

$$\sin 4x \cos 4x \cos 2x - \tfrac{1}{2}\sin 4x \cos 4x = \sin 4x \sin^2 2x + \sin 4x \sin 4x \sin 2x.$$

すべてを一方の辺に移項すると

$$\sin 4x \left[(\cos 4x \cos 2x - \sin 4x \sin 2x) - \left(\sin^2 2x + \tfrac{1}{2}\cos 4x\right)\right] = 0.$$

最初の括弧は $\cos(4x + 2x) = \cos 6x$ である。二つ目については $\sin^2 2x = \frac{1}{2}(1 - \cos 4x)$ より $\sin^2 2x + \frac{1}{2}\cos 4x = \frac{1}{2}$ である。よって

$$\sin 4x \left(\cos 6x - \tfrac{1}{2}\right) = 0,$$

であるから、$\cos 6x = \frac{1}{2}$ または $\sin 4x = 0$ となり、示すべきことが示された。

次に、$0 \leq x \leq \pi$ における $(\star)$ の解を求める。

考えてみよう $\sin 4x(\cos 6x - \frac{1}{2}) = 0$ の解はすべて $(\star)$ の解だろうか？

必ずしもそうではない。逆にたどれない可能性があったのは余弦を掛けた段階だけであり、それが逆にたどれるのは四つの正接がすべて定義されるときに限られる。したがって $(\star)$ の解は、$\sin 4x(\cos 6x - \frac{1}{2}) = 0$ の解のうち $\cos x, \cos 2x, \cos 3x, \cos 4x \neq 0$ を満たすものである。

場合 $\sin 4x = 0$。$[0, \pi]$ においては $x = 0,\ \frac{\pi}{4},\ \frac{\pi}{2},\ \frac{3\pi}{4},\ \pi$ である。$x = \frac{\pi}{4}$ と $x = \frac{3\pi}{4}$ では $\tan 2x$ が定義されず、$x = \frac{\pi}{2}$ では $\tan x$ が定義されない。$x = 0$ と $x = \pi$ ではすべての正接が 0 となり、$(\star)$ は $0 = 0$ となる。よって $x = 0$ と $x = \pi$ は解である。

場合 $\cos 6x = \frac{1}{2}$。このとき $6x = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi$ であるから $x = \frac{(6k \pm 1)\pi}{18}$ である。$0 \leq 6x \leq 6\pi$ より

$$x = \frac{\pi}{18},\ \frac{5\pi}{18},\ \frac{7\pi}{18},\ \frac{11\pi}{18},\ \frac{13\pi}{18},\ \frac{17\pi}{18}.$$

を得る。いずれも m が 3 の倍数でない $\frac{m\pi}{18}$ の形である。余弦 $\cos nx$ が 0 になるのは nx が $\frac{\pi}{2} = \frac{9\pi}{18}$ の奇数倍のときに限られ、そのためには $9 \mid nm$ が必要である。$3 \nmid m$ である

から $9 \mid n$ が必要になるが、これは $n \in \{1,2,3,4\}$ では不可能である。よって四つの正接はすべて定義され、これら六つの値はすべて解である。

以上より、$(\star)$ は $0 \le x \le \pi$ において八つの解をもつ。

$$x = 0,\ \frac{\pi}{18},\ \frac{5\pi}{18},\ \frac{7\pi}{18},\ \frac{11\pi}{18},\ \frac{13\pi}{18},\ \frac{17\pi}{18},\ \pi.$$

検算

- (i) で $x = \frac{\pi}{8}$ のとき：$\cos\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ かつ $\cos\frac{3\pi}{8}\cos\frac{\pi}{8} = \frac{1}{2}(\cos\frac{\pi}{2} + \cos\frac{\pi}{4}) = \frac{1}{2\sqrt{2}}$ であるから、積は $4 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{2}} = 1$ となる。
- (ii) で $x = \frac{\pi}{18} = 10^\circ$ のとき：$\tan 10^\circ \approx 0.17633$ であり、一方 $\tan 20^\circ \tan 30^\circ \tan 40^\circ \approx 0.36397 \times 0.57735 \times 0.83910 \approx 0.17633$ である。
- 両方の方程式を $[0, \pi]$ 上でコンピュータで調べると、それぞれちょうど六つと八つの解が上の値に見つかる。

よくある間違い

- (ii) で $x = \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}$ を残してしまうこと。これらは $\sin 4x = 0$ を満たすが、$(\star)$ のいずれかの正接が定義されなくなる。
- $x = 0$ と $x = \pi$ を忘れること、あるいは各周期における $2x$（または $6x$）の二つ目の値を見落とすこと。
- 式の整理の途中で $\sin 4x$ で割ってしまい、問題が求めさせようとしている因数を失うこと。

STEP のその先へ

積和公式（product-to-sum formulae）は、$e^{iA}e^{iB} = e^{i(A+B)}$ を実数の世界に映した影である。$\cos\theta = \frac{1}{2}(e^{i\theta} + e^{-i\theta})$ と書けば、余弦のどんな積も和に変わる。これはフーリエ級数（Fourier series）への第一歩であり、そこでは関数が $\cos nx$ と $\sin nx$ の和として展開される。(ii) に隠れていた印象的な恒等式 $\tan 10^\circ = \tan 20^\circ \tan 30^\circ \tan 40^\circ$ は、三角関数の値を 1 の冪根（roots of unity）として見たときに現れる驚きの典型例である。Needham の *Visual Complex Analysis*（『ヴィジュアル複素解析』）は、この視点を見事に展開している。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。